

Loeng 19. Kiirgusoptika

Valguse vastasmõju keskkonnaga. Elektromagnetlainetest rääkides oleme korduvalt rõhutanud, et need ei vaja oma levimiseks keskkonda. Tavaväide on selline, et tegu on ruumis leviva elektri- või magnetväljaga, mille tugevus muutub vastavalt lainevõrrandile. Küsimusele, mida selline "väli" endast kujutab, vastatakse tavaliselt Newtoni füüsika laadis: väli (täpsemalt *jõuväli*) on matemaatiline abstraktsioon, mis lubab kirjeldada kehade vastasmõju ruumikoordinaatidest sõltuvate funktsioonide (väljatugevus, potentsiaal) vahendusel.

Kõik see on õige **staatiliste väljade** (gravitatsiooniväli, elektriväli) korral. "Laineline" elektromagnetväli on sootuks teist tüüpi füüsikaline objekt. Staatilise välja tekitamiseks ei kulu energiat - see kuulub kehade teatud omaduste (mass, elektrilaeng) juurde. Et tekitada elektromagnetlaineid (valgust), tuleb aga teha tööd, st. kulutada energiat. Ka on võimalik neist lainetest energiat ammutada (näiteks end päikese käes soojendades).

Kiirgusoptika käsitleb valgust (elektromagnetlaineid) kui **energiavoogu**.

Vastasmõjus ainega (keskkonnaga) võib see energia

- **neelduda** (muutudes teisteks energialiikideks),
- **hajuda** (muutudes mingis teises suunas levivaks kiirguseks),
- **peegelduda või murduda**, (muuta suunda või levimiskiirust),
- **polariseeruda** (muuta võnketasandit) ja isegi
- jaguneda kaheks eri suunas levivaks kiirguseks (kaksikmurdumise korral).

Sellesse teemasse kuulub ka kiirguse teke.

Kaasaegses füüsikas käsitletakse kõiki neid probleeme **kvant-teooria seisukohalt**. Meie ülesandeks on kõigepealt jõuda laineoptikast kvant-teooriani. Aga alustame siiski klassikalise laineteooriaga.

Ostsillaatoritest koosnev keskkond. Kõige lihtsam viis kirjeldada laine levikut keskkonnas on oletada, et keskkond koosneb võnkumisvõimelistest osakestest - nn. ostsillaatoritest.

Ostsillaatori omadused tulenevad võnkumiste võrrandist ja neid saab väliendata kahe parameetriga: **omavõnkesagedus** ω_0 ja

Valgus (elektromagnetväli) kujutab endast ruumis levivat energiavoogu, mida kirjeldab lainevõrrand.

Vastasmõjus ainega võib valgus

- neelduda,
- hajuda,
- peegelduda,
- murduda (muuta faasikiirust) ja
- polariseeruda (muuta võnketasandit).

Laineoptikas käsitletakse keskkonda kui võnkumisvõimeliste osakeste - **ostsillaatorite** kogumit.

NB! Järgneva teksti matemaatiline osa pole Teie jaoks kohustuslik materjal, vaid pigem illustratsioon selle kohta, kuhu jõudis klassikaline füüsika 19. sajandi lõpuks.

sumbuvestegur β . Mis moel need kaks sõltuvad keskkonna omadustest, seda me ei vaata.

Ostsillaatori liikumisvõrrand on meile juba tuttav sumbuvvõnkumiste võrrand:

$$x = ae^{-\beta t} \cos \omega t, \text{ kus } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2};$$

ehk komplekskujul

$$x = ae^{(-\beta + i\omega)t}.$$

Elektromagnetlainel levimisel keskkonnas hakkab ostsillaator sooritama sundvõnkeid temale mõjuva perioodilise jõu $f = qE_0 \sin \omega_s t$ toimel. Nagu võnkumiste teooriast teada, toimuvad need sundiva jõu sagedusega (ω_s), aga faasinihkega

$$\Delta\varphi = \arctan \frac{2\beta\omega_s}{\omega^2 - \omega_s^2}.$$

Amplituud meid üldjuhul ei huvita. Võnkuvat ostsillaatorit vaatame nüüd kui Huygens'i lainefrondi punkti - sekundaarlaine allikat.

See tähendab, et laine levimisel keskkonnas kasutame todasama Huygens-Fresnel'i printsiipi, arvestades täiendavalt faasinihet ja vajaduse korral ka amplituudi muutumist.

See on loomulikult *klassikalise mehaanika vaatenurk*. Tänapäeva füüsikas on ostsillaator ennekõike kvantobjekt.

Valguse murdumine (faasikiiruse muutus). Vaatame, kuidas mõjutab valguslaine levimist tema teele asetatud õhuke plaati paksusega Δz ja murdumisnäitajaga n . Plaadile langev valguslaine sisaldab harmooniliselt muutuvat elektrivälja $E_s = E_0 \exp(i\omega(t - \frac{z}{v}))$.

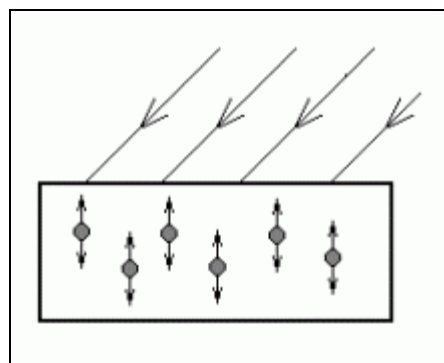
Koosnegu keskkond ostsillaatoritest laenguga q , massiga m ja omavõnkesagedusega ω . Sumbuvust (amplituudi muutust) me esialgu ei vaata.

Sundvõngete teooria järgi hakkab harmooniliselt muutuvasse elektrivälja sattunud ostsillaator tegema sundvõnkeid amplituudiga

$$x_0 = \frac{qE_0}{m(\omega^2 - \omega_s^2)}$$

ja sagedusega ω_s .

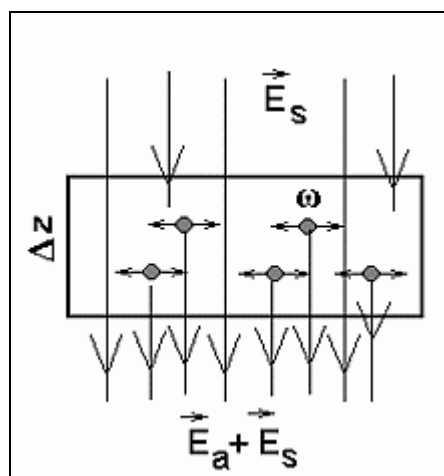
Klassikaline füüsika kirjeldab valguse vastasmõju ainega ostsillaatorite sundvõnkumise kaudu: elektromagnetväli paneb ostsillaatori võnkuma, võnkuv ostsillaator aga käitub laineallikana.



Keskkonnas leviva valguse klassikaline mudel:

muutvas elektriväljas võnkuvad laenguga osakesed - ostsillaatorid.

Kaasaegses füüsikas on ostsillaator kvantobjekt, mille olekut (olekuparameetrite komplekt kuhu kuulub ka energia) kirjeldavad spetsiaalsed suurused - kvant-arvud.



Võnkuv elektrivälja läbipaistva plaadi taga: esialgsel lainele E_s lisandub ostsillaatorite genereeritud laine E_a .

Selle tagajärjel hakkab ta kiirgama keralainet. Kaugusel r on tema poolt tekitatud elektrivälja tugevuse valem

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \ddot{x} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{-\omega_s^2 x_0 \exp(i\omega_s(t - \frac{r}{c}))}{r}$$

Küsimus: Miks on nimetajas r , mitte aga r^2 ? Mõelge välja!

Et saada summaarset kiirgust punktis P , tuleb liita kõigi ostsillaatorite kiirgused. Olgu ostsillaatorite ruumtihedus N osakest kuupmeetris. Jagame keskkonna tasapinnalise plaadi kujulisteks kihtideks, iga sellise kihi omakorda pinnaelementideks.

Pinnaelemendilt dS lähtub sel juhul kiirgus $dE_a = N \Delta z E dS$. Integreerime kihtide kaupa, kasutades "summeerimist üle rõngaste".

$$E_a = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} dE = \int_0^\infty \frac{N \Delta z q \omega_s^2 x_0}{4\pi\epsilon_0 c^2} \exp(i\omega_s(t - \frac{r}{c})) \frac{\rho d\rho}{r}$$

Teeme muutuja vahetuse:

$$r^2 = \rho^2 + z^2; \quad 2r dr = 2\rho d\rho \implies \frac{\rho d\rho}{r} = dr$$

Saame

$$E_a = A \int_z^\infty e^{-\frac{i\omega_s}{c} r} dr; \quad \left(A = \frac{q N \Delta z \omega_s^2 x_0}{2\epsilon_0 c^2} e^{i\omega_s t} \right)$$

Et $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}$, saame

$$E_a = -\frac{Ac}{i\omega_s} [e^{-i\omega_s r/c} - e^{-\frac{i\omega_s}{c} z}]$$

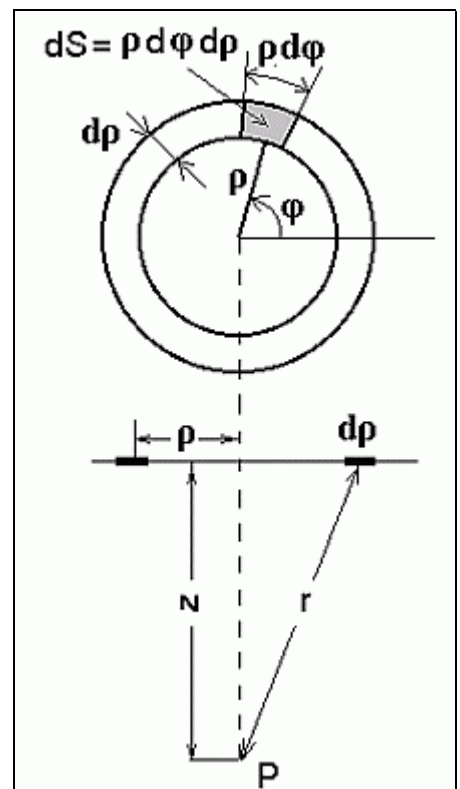
Mäletatavasti $e^{-i\infty} = 0$. Et $i^2 = -1$, siis $-\frac{1}{i} = i$, nii et

$$E_a = -\frac{q N \Delta z}{2\epsilon_0 c} i \omega_s x_0 e^{i\omega_s t} e^{-\frac{i\omega_s}{c} z}$$

Kuna plaadi taguses ruumis levib jätkuvalt ka esialgne laine, koosneb laine teisel pool plaati kahest liidetavast:

$$E_s = E_0 e^{i\omega_s(t - \frac{z}{c})}$$

$$E_a = -i \frac{q N \Delta z \omega_s}{2\epsilon_0 c} \frac{q E_0}{m(\omega^2 - \omega_s^2)} e^{i\omega_s(t - \frac{z}{c})}$$



Plaadilt lähtuva laine arvutamine - summeerimine üle rõngaste.

Näeme, et mõlemad lained on sagedusega ω_s ja levivad kiirusega c . Ainult et liitlaine amplituudiks on kompleksarv. Komplekstasandil kujutab seda arvu meile juba tuttav faasidiagramm.

Kuidas sellest aru saada? Tuletame meelde vahelduvvooluahelate vektordiagramme. Laine (võnkumine) tähendab seda, et amplituudivektor pöörleb kellaosutle vastassuunas nurkkiirusega ω_s . Et kiirused olid võrdsed, pöörlevad nii \vec{E}_s kui \vec{E}_a koos; koos nendega loomulikult ka vektorsumma $\vec{E}_s + i\vec{E}_a$.

Ainult et see summaarne väljavektor jääb esialgselt väljast \vec{E}_s maha nurga φ võrra. Ja seda nurka saab arvutada:

$$\tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{E_a}{E_s} = \frac{q^2 N \omega_s}{2m\epsilon_0(\omega^2 - \omega_s^2)c} \Delta z.$$

Seega liitlaine hilineb faasis, säilitades seejuures endise sageduse ja levimiskiiruse. Viimane tundub imelikuna - oleme juba jõudnud harjuda Fermat' printsiibi ning kiiruse vähenemisega.

Aga: me vist unustame, mille me leidsime: meie φ tähendab **faasi hiline mist** ja see hiline mine on **võrdeline kihi paksusega Δz** . Kokkuvõttes: faasi hiline mine polegi muud, kui faasikiiruse vähenemine.

Võrdleme saadud tulemust faasikiiruse harjumuspärase valemiga $v = c/n$. Faasi hiline miseks kihis paksusega Δz tuleb:

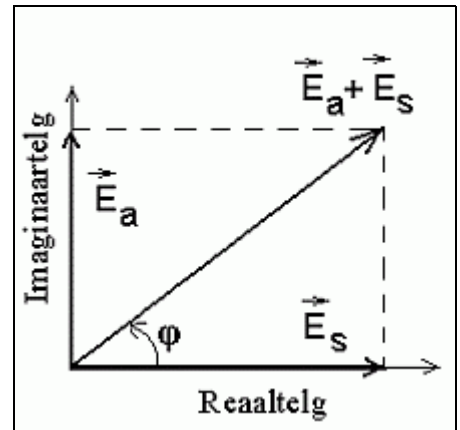
$$\varphi = 2\pi \frac{\Delta t}{T} = 2\pi \frac{\frac{\Delta z}{v} - \frac{\Delta z}{c}}{T} = 2\pi \frac{(n-1) \frac{\Delta z}{c}}{T = \frac{2\pi}{\omega_s}} = \frac{(n-1)\omega_s}{c} \Delta z.$$

Väikese Δz korral, arvestades c suurt väärtust, võime lugeda $\tan \varphi \approx \varphi$. Võrreldes faasinihke kaht valemist, saame murdumisnäitaja "teoreetilise väärtuse":

$$n = 1 + \frac{q^2 N}{2m\epsilon_0} \frac{1}{\omega^2 - \omega_s^2}.$$

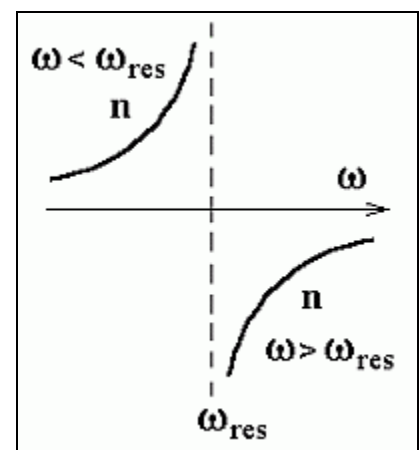
Näeme, et murdumisnäitaja ühele liituv osa koosneb konstantsest kordajast (on atomaarsete konstantide kombinatsioon) ja liikmest, mille väärtus sõltub valguse sagedusest. Viimase muutumist iseloomustab kõrvaltoodud graafik.

Üldiselt on pilt selline, et **läbipaistvates** ainetes on omasagedus $\omega \gg \omega_s$. Seetõttu on neis $n \approx 1$ (ulatub maksimaalselt kolmeni). Kuna vasakul pool resonantsijoont ($\omega_s < \omega$) on murdumisnäitaja suurem ühest tuleb liitlaine faasinihke negatiivne ja seetõttu



Faasinihke primaarse laine (vektor \vec{E}) ja ostsillaatori kiiratud sekundaarlaine (vektor \vec{E}_s) vahel.

Ostsillaatorite poolt põhjustatud faasinihke on samaväärne laine levimiskiiruse (faasikiiruse) muutumisega.



"Teoreetiline dispersioon": faasinihke kõverad kahel pool resonants-sagedust. Hea tahtmise juures leiab siit isegi mingi sarnasuse eksperimentaalsete kõveratega...

faasikiirus väheneb. Paremalt pool resonantsipiirkonda oleks pilt vastupidine: $n < 1$, faasinihe positiivne ja $v > c$.

Kõik see ei tähenda midagi valguse **tegelik** kiiruse kohta. Elektriväli, olgu ta muutlik või muutumatu, levib ruumis kiirusega c . Meie poolt "valguse kiiruse" käsitletav faasikiirus määrab vaid lainevektori, st energiavoo suuna. Suuna muutus keskkondade eralduspiiril seostub ainult faasikiirusega, nagu järeldus juba Fermat' printsiibist.

Dispersioon. Meie poolt leitud murdumisnäitaja sõltuvus sagedusest (lainepikkusest) kannab nimetust dispersioon (lad. *dispersio* = hajumine). Levinumat juhtu, kus sageduse suurenemisel n kasvab, nimetatakse **normaalseks**, vastupidist (n kahaneb) aga **anomaalseks dispersiooniks**.

Normaalse dispersiooni korral murduvad sinised kiired (lühem lainepikkus, järelkult suurem sagedus) rohkem kui punased: seetõttu paiknevad prisma spektroskoobis spektrivärvid vastupidiselt difraktsioonimaksimumile, kus rohkem kaldusid kõrvale just punased kiired.

Dispersiooni teooria on kvalitatiivne, täpseid valemeid ei saa me isegi kvantteooria abiga. Praktikas kasutatakse lähendvalemeid (rittaarendusi), nagu:

$$n = \hat{n}_0 + a\omega^2 + b\omega^4 + \dots \text{ ehk } n = a + \frac{b}{\lambda^2} + \frac{c}{\lambda^4} + \dots,$$

piirdudes tavaliselt kahe esimese liikmega.

Dispersioonil põhinevaid spektraalriistu kalibreeritakse tavaliselt töö käigus.

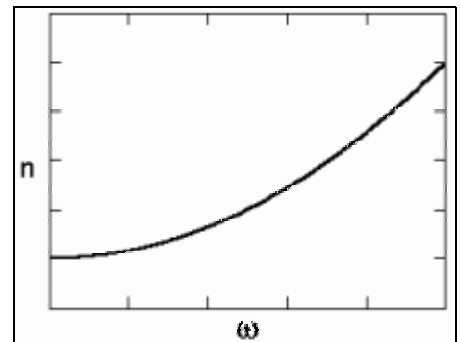
Neeldumine. Ülaltoodud matemaatilistes arutlustes vältisime teadlikult sumbuvestegurit β . Tegelikult sisaldab sundvõngete valem alati neeldumisliget, mis muudab nii amplituudi kui faasinihe valemite kuju:

$$x_0 = \frac{qE_0}{m\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\omega_0^2}}, \quad \tan \varphi = \frac{2\beta\omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2}.$$

Viimaseid võime kompleksesituses anda ka ühe valemiga:

$$\hat{x}_0 = \frac{qE_0}{m(\omega^2 - \omega_0^2 + i2\beta\omega_0)}$$

Faasikiiruse sõltuvust sagedusest (millest järeldub erineva lainepikkusega kiirguse erinev murdumisnäitaja) nimetatakse **dispersiooniks**.



Dispersioon arvatuna "astmerealise" lähendvalemi järgi.

Imaginaararvuline sumbuvusliige β sisaldub ainult nimetaja sulgavaldises ja seetõttu võime defineerida kompleksarvulise "murdumisnäitaja":

$$\hat{n} = 1 + \frac{q^2 N}{2m\epsilon_0} \frac{1}{\omega^2 - \omega_s^2 + i2\beta\omega_s} = n' - in''.$$

Selle reaali- ja imaginaarosa avalduvad kujul:

$$n' = 1 + \frac{q^2 N}{2m\epsilon_0} \frac{\omega^2 - \omega_s^2}{(\omega^2 - \omega_s^2)^2 + 4\beta^2\omega_s^2},$$

$$n'' = \frac{q^2 N}{2m\epsilon_0} \frac{\beta\omega_s}{(\omega^2 - \omega_s^2)^2 + 4\beta^2\omega_s^2}.$$

Proovime nüüd avaldada väljavõrrandit teisel pool plaati. Analoogia põhjal murdumist käsitleva osaga saame

$$E = e^{-\frac{\omega_s n''}{c} \Delta z} E_0 e^{i\omega_s(t - \frac{z}{v})},$$

kus $v = \frac{c}{n'}$.

Näeme, et "murdunud lainele" lisandus tegur $\exp(-\frac{\omega_s n''}{c} \Delta z)$, kus kihi paksust väljendava Δz kõrval on kõik ülejäänud suurused konstantsed.

Negatiivne eksponent lainevõrrandis tähendab amplituudi vähenemist, see aga kajastub laine intensiivsuse vähenemises. Et intensiivsus on võrdeline amplituudi ruuduga, saame valemi

$$I = I_0 e^{-\kappa \Delta z},$$

kus $\kappa = \frac{2\omega_s n''}{c}$ kannab **neeldumisteguri** nime.

Kokku saime nn. Bouguer' (loe: *buzee*) seaduse, mis kirjeldab valguse nõrgenemist neelavas keskkonnas. Näeme, et neeldumistegur sõltub vahest $\omega^2 - \omega_s^2$ ja on maksimaalne resonantsipiirkonnas $\omega \approx \omega_s$.

Seetõttu

- pole ained resonantsipiirkonnas läbipaistvad ja
- murdumisnäitaja ja faasikiirus ei omanda kunagi lõpmatut väärtust.

Muide on olemas ka teisi meetodeid dispersiooni ja neeldumise teoreetiliseks põhjendamiseks (vt. näit. I.Saveljev, Füüsika III, 7. ptk.). Ma valisin R. Feynmanni interpretatsiooni kui mulle teada olevaist kõige kompleksema. Tema abil saadakse jagu ka polarisatsioonist.

Sumbuvusteguri sissetoomine ostsillaatori sundvõngete võrrandisse kajastub väljatugevuse valemis eksponent-tegurina, mille astendaja on negatiivne ning võrdeline valguse tee pikkusega keskkonnas.

Diferentsiaalvõrrandite teooriast: kui mingi funktsiooni tuletis on võrdeline tema endaga, siis sisaldab otsitav funktsioon alati eksponent-tegurit.

Valguse intensiivsuse kahanemine eksponentfunktsiooni järgi on tuntud **Bouguer' neeldumisseaduse** nime all.

Tähelepanu!

Polarisatsiooninähtuste all mõistetakse laineoptikas vaatluslikke fakte, mida saab kirjeldada muutuva elektrivälja valikulise suunaga. Kõik käesoleva osa joonised on tehtud sellest definitsioonist lähtuvalt.

Mis saab "kadunud energiast"? Aine loomulikult soojeneb - see on üks võimalus. Aga ta võib ka valgust hajutada. Kvantfüüsika lubab väga mitmesuguseid hajumismehhanisme; ja mõned neist on reaalselt jälgitavad.

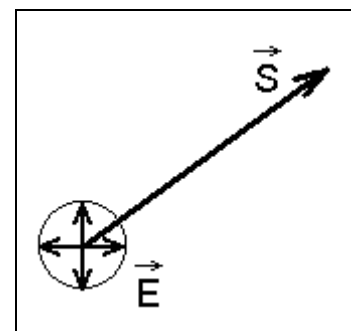
(Vt: Rayleigh' hajumine, Tyndall'i efekt, Comptoni efekt, kombinatsioonhajumine, fotoluminesents - I. Saveljev. Füüsika III).

Polarisatsioon. Seni vaatasime nii ostsillaatorit kui lainet mingi abstraktse võnkumisena. Tegelikult on harmoonilistel võngetel alati määratud **võnkesiht** (siht või telg, mille suunas toimub võnkumise keha liikumine) ja ristlaine korral ka **võnketasand** (tasand läbi võnkesihi ning lainevektori).

Polarisatsiooni all mõistetakse optikas nähtusi, mida saab seletada valguse kui ristlainetuse sõltuvusega võnketasandist.

Eristatakse **loomulikku** valgust, kus valguskiires (lainepaketis) on võrdselt esindatud kõik võimalikud võnketasandid.

- Kui mingi tasand on eelistatud, räägime **osaliselt polariseeritud** valgusest.
- Kui elektrivälja tugevus muutub ainult ühes kindlas sihis, on valgus **täielikult e. lineaarselt polariseeritud**.

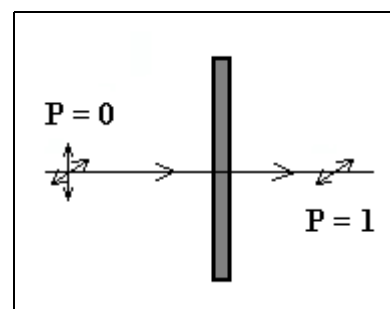


Polariseerimata ehk "loomulik" valgus.

Väljavektor \vec{E} on laine liikumissuunaga ristuv tasandis, eelissuund aga puudub (kõik suunad on võrdselt esindatud).

See, missuguse valgusega on tegemist, sõltub nii valgusallika omadustest kui ka keskkonnast, milles valgus levib. Looduslike valgusallikate korral on tavaliselt tegu loomuliku, polariseerimata valgusega.

Valguse polariseeritust pole võimalik kiirgusvastuvõtjate abil mõõta, kuna valgusvoo energeetilised näitajad võnketasandist ei sõltu. Seetõttu kasutatakse *polarimeetrites* spetsiaalseid valgusfiltreid, nn. **polaroide**, mis lasevad läbi ainult kindla võnketasandiga kiirgust. Pöörates sellist filtrit kiirgusvastuvõtja või lihtsalt silma ees, on võimalik heleduse perioodilise muutumise järgi kindlaks teha ja ka mõõta polarisatsiooni olemasolu.

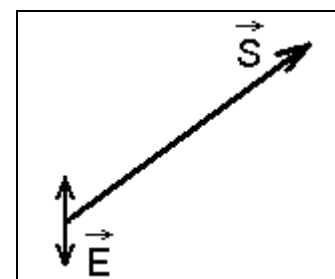


Polarisatsiooni saab kindlaks teha polaroidiga - seadmega, mis laseb läbi ainult kindlas suunas polariseeritud valgust. Polaroidi läbinud valgus on alati lineaarselt polariseeritud.

Mõõdetavaks suuruseks on nn. **polarisatsiooniaste**:

$$P = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$$

Näeme, et polariseerimata valguse ($I_{max} = I_{min}$) korral on $P = 0$, lineaarselt polariseeritud valgusel ($I_{min} = 0$) aga $P = 1$.



Täielikult (lineaarselt) polariseeritud valgus. Lubatud on ainult üks kindel võnkesiht.

Tegelikult ei tähenda nulliga võrdne polarisatsioonaste veel polarisatsiooni puudumist.

Kujutame näiteks kaht koherentset, lineaarselt polariseeritud, sama intensiivsusega, samas suunas levivat kiirt, mille käiguvahe on näiteks $\pi/2$. Polarisaatori läbib selline valgus nagu loomulik; aga sellele vaatamata on tegu "ebaloomuliku", seekord **ringpolariseeritud** valgusega.

Kui kiirte intensiivsused on erinevad või faasinurk erinev täisnurgast, on tegu **elliptiliselt polariseeritud** valgusega.

Looduses esineb ka aineid, milles levimisel valguse polarisatsioonitasand muutub - neid nim. **optiliselt aktiivseteks** aineteks ja enamik neist on orgaanilise päritoluga ühendid (näit. suhkur).

Vaatame järgnevalt võimalikke seletusi mõningaile polarisatsiooninähtustele. Ette võib öelda, et täielikku seletust kõigile neile füüsika ei tunne.

Lähtume kujutlusest, et

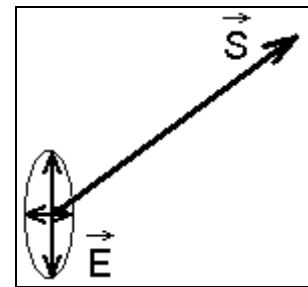
- valgus on ristlainetus,
- kehtib Huygens-Fresnell'i printsiip ja
- keskkond, milles valgus levib, koosneb kindlate omadustega ostsillaatoritest.

A. Polarisatsioon hajumisel. Vaatleme mittehomogeenses (hägusas) keskkonnas levivat tasalainet. Laine teele jäävad ostsillaatorid võnguvad võnkesihis; seetõttu on nende poolt kiiratud valgus polariseerimata vaid "piki lainet", st.laine levimise sihis.

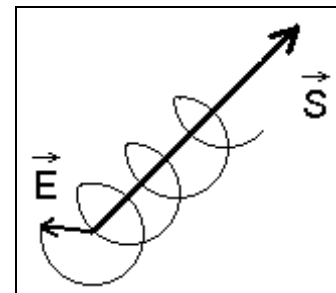
Kui esineb hajumine (ostsillaatorid või nende rühmad kiirgavad mingis muus suunas), siis ei saa see valgus olla polariseerimata. Kui oletada, et ostsillaatori kiiratud valguse polarisatsioonitasand on paralleelne võnkesihiga, peaks kiire suunast täisnurga all hajunud kiirgus olema lineaarselt, ülejäänud nurkade korral aga osaliselt polariseeritud.

Mõõtmised näitavad, et efekt on olemas, ehkki mitte absoluutne: me ei arvestanud korduva hajumise võimalust.

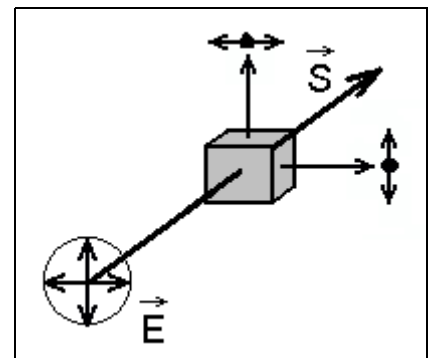
Võtame näiteks päevase taeva. Selle sinine värv osutab molekulaarsele (Rayleigh') hajumisele ja polarisatsioon on hästi järgitav. Räägitakse, et umbes 5% inimestest eristab polariseeritud valgust tavalisest, tajudes teda kollaka värvusena. Minul pole au nende hulka kuuluda, aga igaüks võib seda proovida. Vaadake sinisesse taevasse umbes 90° nurga all Päikesest ja kui näete vertikaalset kollast vööti, võite uskuda, et see ongi polarisatsioonist tingitud värvimuutus.



Osaliselt polariseeritud valgus.



Ringpolariseeritud valgus. Elektrivälja vektori "ots" joonistab lainevektori ümber spiraali.



Polarisatsioon hajumisel: täisnurga all hajunud valgus peab olema polariseeritud, kuna ostsillaatorid võnguvad esialgse kiire suunaga risti.

B. Polarizatsioon peegeldumisel. Sama nähtus tuleb esile ka valguse peegeldumisel keskkondade eralduspinnalt. Siingi võnguvad ostsillaatorid ainult risti kiirega. Keskkondade eralduspinnal kiir murdub ja kuna "alumise" keskkonna ostsillaatorid peavad samuti võnkuma risti murdunud kiirega, jääb osa võnkumist "üle". See "ülejäanud" valgus ei saa kuhugi kaduda ning ainsaks võimaluseks on peegeldumine murdvalt pinnalt tagasi "ülemisse" keskkonda.

Tekib kaks polariseeritud kiirt: peegeldunud kiires on ülekaalus pinnaga paralleelsed, murdunud kiires aga pinnaga ristuvad võnkumised. Juhul, kui peegeldunud ja murdunud kiir on omavahel risti, on valgus peegeldunud kiires täielikult (lineaarselt) polariseeritud.

Langemisnurka, mille korral murdunud ja peegeldunud kiir moodustavad täisnurga ja peegeldunud kiir on täielikult polariseeritud, nim. **Brewsteri nurgaks**. Loomulikult on siis polariseeritud ka murdunud kiir - aga mitte täielikult!

Küsimus: Kas oskate seletada, mispärast?

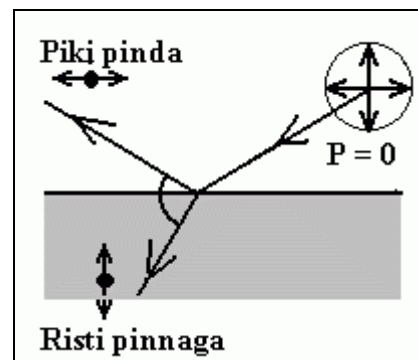
Kui murdvale pinnale langeb polariseeritud valgus, on täheldatav peegeldunud kiirguse intensiivsuse langus Brewsteri nurga lähedal. See annab võimaluse näha sinitaeva valguse polariseeritust ka "normaalse" nägemisega inimestel. Vaadake taeva peegeldust vees õige nurga all ja leidke üles tume laik.

C. Polarizatsioon anisotroopses kristallis. Oma rehkendustes oletasime, et ostsillaatori omasagedus ei sõltu suunast. See on õige vedelikes ja amorfsetes ainetes (nagu klaas), aga mitte kristallides.

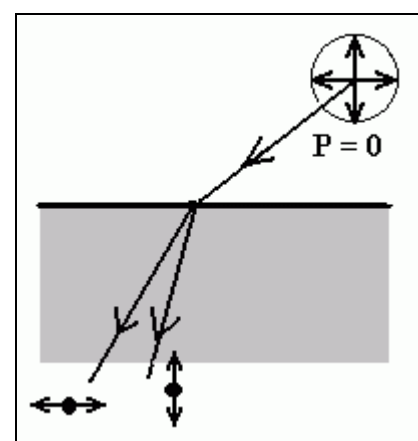
Telgsümmeetrilistes kristallides, nagu pagu, kvarts jt. on tavaline, et omavõnkesagedus peatelje sihis erineb sagedustest sellega ristuvates suundades. Meie teooria järgi kajastub see faasikiiruse, seega ka murdumisnäitaja erinevuses.

Seetõttu võib juhtuda, et peatelje sihis polariseeritud valgus murdub ülejäanuist erineva nurga all. Tulemuseks on see, et kristallile langev kiir jaguneb kaheks ristuvates tasandis lineaarselt polariseeritud kiireks. Nähtus avastati 1670. a. islandi pao kristalli juures; suuremal või väiksemal määral on see mõõdetav kõigi mittekubilise sümmeetriaga kristalsetel ainetel.

Kaksikmurdumise juures on tähelepanuväärne see, et murduda võib ka pinnale risti langev kiir. Mõelge, millistel tingimustel see juhtub ja põhjendage nähtust Huygeni printsiibi abil.



Polarizatsioon peegeldumisel. Ostsillaatorid peegelpinnal ei saa võnkuda risti pinnaga - peegeldunud kiir peab olema polariseeritud.



Kaksikmurdumise seletamine polarizatsiooniga.

D. Polarisatsioon neeldumisel. Mis juhtub, kui anisotroopse kristalli ühe telje suunas on mingi lainepikkusega valgus resonantsolukorras, teiste telgede suhtes aga mitte. Juhtub see, et "neelava telje" sihis võnkuv kiirgus neeldub, ülejäänud aga levib rahulikult läbi kristalli.

Saame jällegi polariseeritud valguse, nüüd aga tänu **selektiivsele neeldumisele**.

Polaroidid. Aineid, mis neelavad kindlas sihis polariseeritud valgust, nimetasime polaroidideks. Parimad polaroidid kujutavad endast niitjate kristallide (või polümeerset tüüpi molekulide) kogumit, kus võnkumised piki kristalli on praktiliselt vabad (toimub tugev neeldumine), risti kristalliga aga keelatud (neeldumine puudub).

Polarisatsioon tehnikas. Polaroidide kasutusala loetlemine pikendaks meie kursust vähemalt ühe täisloengu võrra. Lisan vaid, et ainete optilised omadused, ka polariseeriv toime, on sõltuvad välistingimustest.

Nii täheldatakse optilise anisotroopia teket mehaanilisel deformatsioonil, magnetvälja toimel (Faraday efekt) ja elektriväljas (Kerri efekt). Et optilised mõõtmised on võrratult lihtsamad mehaanilistest, on siin üht-teist inseneridele.

Kõige viljakamaid rakendusi on andnud Kerri efekt - just see võimaldab konstrueerida päikesepatareidel töötavaid kalkulaatoreid ja viieaastase patareiga käekelli.

Vedelkristallindikaator - nn. Kerr'i rakk - on praktiliselt energiavaba indikaator. Ta koosneb peegelpinnale kantud aktiivaine kihist, mida katab polaroid. Staatilise välja lülitumisel (voolu, seega ka energiat pole vaja!) pöördub polaroidi läbinud valguse võnketasand tema ja peegli vahelises aktiivaines, mistõttu valgus enam läbi ei pääse.

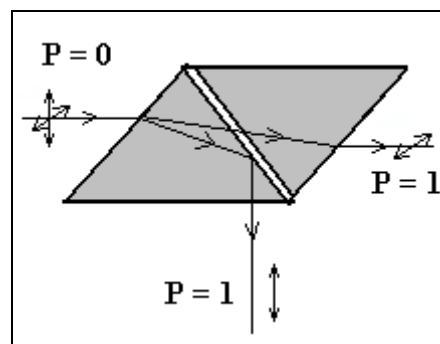
Lülitatud pingega element paistab ekraanil tumedana; neist võib moodustada nii numbreid kui pilte. Kerr'i rakk lülitub äärmiselt kiiresti, see lubab ekraani kasutada ka liikuvate piltide näitamiseks.

Keskkond kiirgajana. Valgusallikatest rääkides oleme senini toetunud kogemusele, et sellised asjad on olemas. Oleks juba aeg rääkida põhjustest, miks valgus tekib - ehk täpsemalt väljendudes tingimustest, millal kehad kiirgavad.

Valgus (ja igasugune, ka elektromagnetlainet) kannab energiat, kujutades endast energiavoogu. Seetõttu **peab kiirgusallikas seda energiat tootma**. Usume, et iseenesest energia ei teki; järelikult

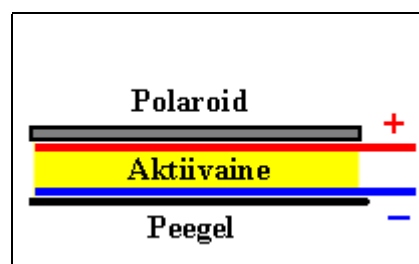
valgusallikas toimub mingite teiste energialiikide muutumine valguskiirguseks.

Füüsika tunneb üsna palju selliseid energia muundumise liike. Aga



Nicol'i prisma (nikol)

- kaksikmurdumisel põhinev seade, mis jagab loomuliku valguse kaheks ristsuunas levivaks, lineaarselt polariseeritud kiireks..



Vedelkristall-indikaator - Kerr'i rakk.

Valgus ei teki iseenesest; kiirgajateks on aineosakesed, mille (sise)energia muundub valguseks.

Kui kehade poolt kiiratud valgus tekib **soojust liikumise** arvel, nimetatakse tekkivat kiirgust soojustkiirguseks.

99.9% valgusest tekib looduses ja tehnikas **aineosakeste soojusliikumise arvel**.

Seda kuumutatud kehade kiirgust nimetatakse **soojuslikuks kiirguseks** e. lühemalt **soojuskiirguseks** (mitte segi ajada infrapunase kiirgusega, mida mõnikord samuti soojuskiirguseks nimetame).

Luminestsents ehk "külm valgus". Enne, kui asuda soojuskiirguse valemite tuletamisele, paneme lühidalt kirja põhilise, mis eristab teisi kiirguse liike.

Soojuskiirguse intensiivsus sõltub keha temperatuurist ja pinna omadustest; kui mingi keha kiirgab **rohkem**, kui ta peaks kiirgama antud temperatuuril, on tegemist **luminestsentsiga** (lad. **lumen** = valgus).

"Normaalsest" madalama temperatuuri tõttu nimetatakse luminestsentsi ka külmaks valguseks.

Luminestsentsi põhjused peituvad aine ehituses. Mõnikord eraldub valguse kujul keemiliste reaktsioonide käigus eralduv energia - seda nähtust nim. *kemoluminestsentsiks*. Viimase alamliigiks on *bioluminestsents* - mõnede organismide helendumine, tavaliselt liigisisese signalisatsiooni eesmärgil.

Kui siia lisada veel teatud ainete võime valgust "salvestada", st. pärast valgustamist jätkata kiirgamist teatud aja vältel (nim. *fosforestsentsiks*, kuna nähtust täheldati kõigepealt fosforiühendite juures), ongi looduslik luminestsents ammendatud.

Tehnika tunneb aga veel mõnesid luminestsentsi alaliike. Näiteks noortemoes tooni andvad erksad värvid põhinevad *fololuminestsentsil* e. *fluorestsentsil* (viimane nimetus tuleneb asjaolust, et nende ainete hulgas on rohkesti fluoriühendeid). Eriti hämaras valguses silma torkav helendumine on põhjustatud nende värvainete omadusel teisendada kogu temale langev kiirgus kindlasse spektrivahemikku.

Seejuures kehtib (kvantmehaanika) seadus, et neeldunud valguse lainepikkus peab olema väiksem kiirguva omast.

Jälgige teile armsaid pluusikesi-mütsikesi - hõõglambi kollases (suure lainepikkusega) valguses tuhmuvad kõik sinised-rohelised toonid ja ainsana helendub nn. signaalpunane (mis oli üldse esimene kasutusele võetud fluorestsent). Seevastu päevavalguses ja luminestsentslampide all on kõige erksamad just sinised toonid.

Üks universaalsemaid luminofoore on tsinksulfiid (**ZnS**). See lihtne ja suhteliselt odav aine helendub pea kõigi võimalike mõjutuste tagajärjel. Pisut häirib tema ebaseaduslikult sinakas toon, mida viimasel ajal edukalt "muudetakse meeldivamaks", segades temasse noidsamu fluorestseeruvaid värve.

Mittesoojusliku tekkemehhanismiga kiirgusi nimetatakse üldnimega **luminestsents**.

Tunneme veel

- **radioluminestsentsi** (helendumine kiirete osakeste, näit, elektronide voo mõjul),
- **elektroluminestsentsi** (helendumine staatilises elektriväljas),
- **triboluminestsentsi** (helendumine mehaaniliste deformatsioonide toimel),
- **termoluminestsentsi**
- jms.

Tsinksulfiid on asendamatu röntgen- ja ultraviolettkiirte muundaja, ta töötab nii telekraanil, päevavalguslampides kui radioaktiivse kiirguse indikaatorites.

Energeetilisest seisukohast toimub luminesentsi korral keha **siseenergia** muundumine valguseks. Siseenergia tüüp pole siin oluline, niisamuti kui selle allikad.

Soojuslik ehk tasakaaluline kiirgus. Kui mingi keha asub kindla temperatuuriga keskkonnas, nõuab termodünaamika teine printsiip, et tema temperatuur peab tasakaaluoleku korral olema võrdne ümbritseva keskkonna temperatuuriga.

Termodünaamika kursuses me ei täpsustanud, mis teel toimub energia ülekanne kuumemalt kehalt külmemale. Koolikursusest teame, et soojusülekanne toimub soojusjuhtivuse, konvektsiooni või **kiirguse** teel. Kaks esimest nõuavad juhtiva/ülekandva keskkonna olemasolu, kolmas on universaalne.

Soojusülekanne kiirgusega toimub sel teel, et kuumem keha kiirgab rohkem energiat, kui neelab; külmem aga vastupidi - neelab rohkem, kui kiirgab. Seetõttu esimese siseenergia väheneb (temperatuur langeb), teise oma aga suureneb (temperatuur kasvab).

Et kehadel pole aimugi teiste kehade (kiirgusallikate) olemasolust, peab vaadeldav keha (aine) olema **termodünaamilises tasakaalus teda ümbritseva kiirgusväljaga**. Seda keha enda ja teiste kehade poolt tekitatud välja iseloomustab kindel temperatuur; kiirgustasakaalu korral on see võrdne vaadeldava keha temperatuuriga.

Viimane väide on õige vaid **isotroopse**, st kõigist suundadest ühtlaselt tuleva kiirguse jaoks. Kui keha valgustab mingi kindel allikas (näiteks Päike), ei tähenda neelatud ja kiiratud energiatega võrdsus veel saabuva ja lahkuva kiirguse ühesugust temperatuuri.

Kiirgusvõime ja neelamisvõime. Niisiis ei pea tasakaaluolekus olema võrdsed mitte temperatuurid, vaid kiiratud ja neelatud energia kogused. Seetõttu sõltub keha poolt kiiratud energia lisaks temperatuurile veel tema kiirgusvõimest.

Et soojuskiirgus on elektromagnetlainetus, sõltub kiiratud energia peale temperatuuri veel lainepikkusest või sagedusest.

Suurust $r(\omega, T)$, mis väljendab keha pinnatühikult (m^2) sagedusühiku (s^{-1}) kohta kiiratud energiat (dzaulides), nim. **keha kiirgamisvõimeks**.

Kiirgust, mida keha kiirgab termodünaamilise tasakaalu tingimustes (kindlal temperatuuril), nimetatakse **tasakaaluliseks** kiirguseks.

Keha kiirgamisvõime näitab, kui palju energiat kaotab keha kiirguse tõttu.

Kui integreerida kiirgamisvõimet üle kõigi sageduste, saame suuruse

$$R_e(T) = \int_0^{\infty} r(\omega, T) d\omega,$$

mida nimetatakse keha **kogukiirgusvõimeks e. valgsuseks**.

Kui integreerime veel üle keha pinna (eeldades, et kiirgusvõime on kõikjal ühesugune), saame **keha kogukiirguse**; jagades selle 4π -ga aga vaadeldava keha poolt ühikulisse ruuminurka kiiratava energiavoo.

Kui soovime leida valgustatud kehale **juurde tulevat** energiahulka, peame jagama valgustatud eseme ristlõikepindala valgusallika kauguse ruuduga (milleks?) ning arvestame tema neelamisvõimet.

Neelamisvõime on suurus, mis väljendab "alla neelatud" energiahulga suhet kehale langevasse energiasse. Kui tähistada mingile pinnatükile langenud energiat E_l ning sellelt hajunud/peegeldunud energiat E_h , saame selle pinnatüki koguneelamisvõimeks

$$\alpha = \frac{E_l - E_h}{E_l}.$$

Seegi suurus sõltub sagedusest ja temperatuurist, nii on siingi otstarbekas defineerida neelamisvõime sagedusühiku kohta antud temperatuuril:

$$\alpha(\omega, T) = \frac{\Phi_l(\omega, T) - \Phi_h(\omega, T)}{\Phi_l(\omega, T)}.$$

Kirchoff'i seadus ja "must keha". Igapäevaelust teame, et erinevate kehade neelamisvõimed on väga erinevad.

Kiirgamisvõime kohta me seda nii kindlalt väita ei saa - teame küll, et keha kiirgab seda rohkem, mida kõrgem on tema temperatuur. rohkem.

Seda, kuidas kiirgavad erinevad kehad ühl ja samal temperatuuril, niisama lihtsalt ei ütle. Kui aga mõtma hakata, tuleb välja huvitav seos: tumedad kehad, mille neelamisvõime on suurem, kiirgavad kuumutamisel tugevamini, kui heledad kehad.

Termodünaamika II printsiip seletab asja ära: kui kiirgust tugevasti neelav keha kiirgaks vähem, kui halvasti neelav keha samal temperatuuril, hakkaks tema temperatuur tõusma teise keha kiirguse arvel.

Kui oletada, et algtemperatuur oli mõlemal kehal võrdne, siis tuleks välia et kiirgusliku energiavahetuse tõttu võih tekkida

Keha neelamisvõime näitab, kui suur osa kehale langevast kiirgusest neeldub, muutudes keha siseenergiaks.

NB! ärge ajage segi Kirchoff'i reegleid (käivad hargnevate vooluahelate kohta) ja Kirchoff'i seadust (keha soojuskiirguse kohta). Mees on küll sama, aga teemad on erinevad.

Kui keha neelab kogu temale langeva kiirguse (neelamisvõime $\alpha = 1$) nimetatakse teda **absoluutselt mustaks kehaks**.

temperatuuride erinevus. Aga selleks peab soojus iseenesest minema üle külmemalt kehalt kuumemale, mis on termodünaamiliselt võimatu.

Vastava seaduse formuleeris G. Kirchoff 1859. a.

Kiirgamisvõime ja neelamisvõime suhe on kõigil kehal sama, keha ja tema pinna omadustest sõltumatu funktsioon, mis sõltub ainult temperatuurist ja sagedusest.

Funktsiooni $f(\omega, T) = \frac{r(\omega, T)}{a(\omega, T)}$ nimetatakse tavaliselt **musta keha kiirgusvõimeks**, kuna "kõige tumedamal" ehk "absoluutselt mustal" kehal peab neelamisvõime olema $a = 1$ - ta neelab kogu pealelangeva kiirguse. Et sellisel juhul $r = f$, tähendabki meie funktsioon absoluutselt musta keha kiirgusvõimet.

Must keha on järjekordne matemaatiliselt laadi abstraktsioon; reaalsed kehad on "hallid" (neelamisvõime on ühest väiksem ja ei sõltu sagedusest) või "värvilised" (erinevatel sagedustel on neelamisvõime erinev).

Eksperimentaaloptikas kasutatakse "musta keha mudelit", kus õõnsa kera seina on puuritud auk. Sellesse auku langev valgus hajub kera sisepinnal ja tema kaudu väljuv osa kiirgusest on võrdne augu pinna ja kera kogupinna suhte ning sisepinna peegeldumisvõime (albedo) korrutisega.

Kui teha kera hästi suur ning auk väike, võime saada kuitahes suure (ühe-lähedase!) neeldumisvõime.

Küsimus: Mis juhtub, kui sellist kera kuumutada? Kumb paistab heledam, kas kera pind või selles olev auk? Ja miks?

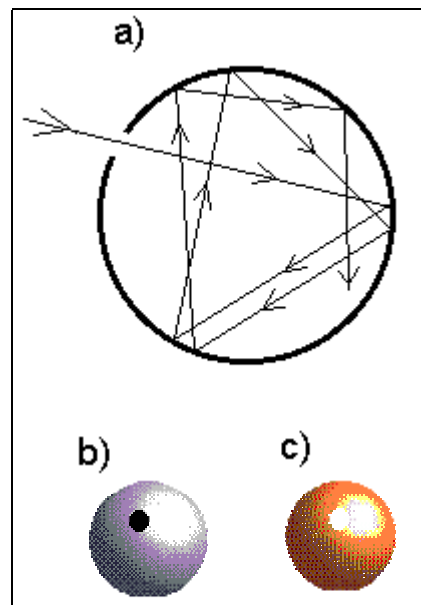
Musta keha spekter ja kiirgusseadused. Funktsiooni $f(\omega, T)$ fundamentaalne iseloom kutsus esile vajaduse selle leidmiseks. "Ostsillaatoriteooriast" lähtudes leidis W. Wien, et jaotusfunktsioon peab omama kuju $f(\omega, T) = \omega^3 F\left(\frac{\omega}{T}\right)$.

Mõõtmised andsid tulemuseks Maxwelli jaotust meenutava kõvera; mille kohta leidis Wien 1893. a. ka empiirilise valemi:

$$f(\omega, T) = c_1 \omega^3 e^{-c_2 \frac{\omega}{T}},$$

kus konstandid c_1 , c_2 leitakse eksperimentaalselt.

Wieni seadus kirjeldab spektri käiku rahuldavalt ning määrab õigesti maksimumi asukoha.



Musta keha mudel - auguga kera.

- kiirte käik õõnsuses;
- külmas kera paistab auk tumedana;
- kuumutatud kera pinnal on auk kõige heledam.

Funktsiooni $f(\omega, T)$ nimetatakse musta keha spektriiks.

NB! Spekter (ld *spectrum* - nägemus) tähendab matemaatikas jaotusfunktsiooni, mis seab vaadeldavale parameetrile (antud juhul sagedusele või lainepikkusele) vastavusse vastavate objektide (näiteks ostsillaatorite) suhtelise hulga.

Optikas tähendab spekter tavaliselt kiirgusvõime sõltuvust sagedusest (või lainepikkusest).

Viimase sõltuvust temperatuurist kirjeldab märksa enam tuntud **Wieni nihke seadus**:

$$\lambda_{max}T = b = 0.2897 \text{ cm deg};$$

suurust b nim. *Wieni konstandiks*.

Ka sobib seaduse integreerimisel saadava **Stefan-Boltzmanni seaduse**

$$R = \int_0^{\infty} f(\omega, T) d\omega = \sigma T^4$$

konstant piisavalt hästi eksperimentidist leituga ($\sigma = 5.7 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2}\text{K}^{-4}$).

"Ultravioletne katastroof". Kasutades möödunud sajandi lõpus moes olnud statistilise mehaanika meetodeid, jõudsid J. Rayleigh ja J. Jeans kaunis kahtlaste eelduste ning keerulise matemaatika (vt. Saveljev III, lk. 194) abil valemini

$$f(\omega, T) = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} kT,$$

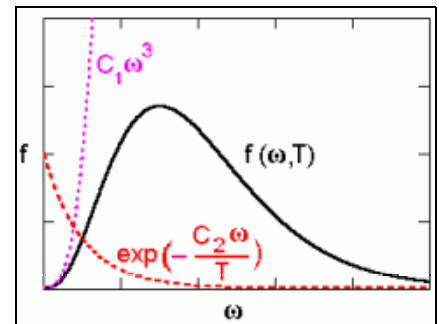
mis küll rahuldab Wien'i tingimust, kuid annab täiesti vastuvõtmatu tulemuse - kiirgusenergia piiramatut kasvu sageduse suurenemisel.

Et valem oli teoreetiliselt korrektne, hakati tema vastuolu katsetulemusega nimetama *ultravioletseks katastroofiks*.

19. sajandi lõpp ongi klassikalise füüsika loojang. Kapitali poolt loodud head uurimistingimused ülikoolides olid genereerinud arvuka teadlaste klassi, kes aga kippus jätkama vana, "filosoofilist", kõikeseletavat teadust.

Darvinism bioloogias ning mehhanitsism füüsikas jätsid mulje "valmis teadusest". Oli sündinud veel üks *Megale Syntaxis* - Ptolemaiose ajast tuntud Suurim Ehitis, illusioon lõpetatud (või peaaegu lõpetatud) tunnetusprotsessist.

Füüsikas jäid vaid kaks "väikest pilvkest" - Michelsoni untsuläinud katse Maa kiiruse määramiseks eetri suhtes ning "ultravioletne katastroof".



"Musta keha spekter" - Wien'i lähend. Wien'i ja Stefan-Boltzmanni seadused on **empüirilised**, st saadud katsetulemuste matemaatilise üldistamise teel. Nende sidumine "ostillaatoriteooriaga" viis kvantfüüsika tekkele.

Planck'i valem. Aastal 1900 näitas saksa füüsik M. Planck, et eksperimentaalset spektrit kirjeldab Wiener valemist märksa täpsemini seos

$$f(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^2} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1},$$

mis on matemaatiliselt samaväärne Maxwelli jaotusega energiatega järgi eeldusel, et kiirgusvoog koosneb jagamatutest energiakvantidest, mille energia on võrdeline sagedusega:

$$E(\omega) = \hbar\omega = h\nu,$$

kus konstant $h = 2\pi\hbar = 6.63 \cdot 10^{-34}$ Js.

Konstanti h (\hbar) nimetamegi tänapäeval **Planck'i konstandiks**.

Laine jagamine kvantideks on mehaanika seisukohalt võimatu.

Kui ostsillaator kiirgabki piiratud aja vältel, tekib tema ümber ikkagi vaid keralainete jada, mis meenutab kivi vette kukkumisel veepinnale tekkivaid ringe. Et kiirata "lainepakett" kindlasse suunda, on vaja keeruka ehitusega peegeldajat - näiteks võib tuua projektori paraboolpeegli.

Hea tahtmise poolest võiks ette kujutada ümber tuuma liikuva elektroni sellist orbiiti, millelt lähtuvate keralainete interferentsil tekib kindlas suunas liikuv lainepakett - soliton.

Matemaatiliselt pole sellega seni keegi maha saanud.

- Ja kuidas mõista nüüd Huygensi printsiipi?
- Mis on lainefront ja kuidas tekib sekundaarlaine solitoni ümber?
- Kas ka see koosneb solitonidest?

Aga Planck'i valem töötab. Ja hüpotees kiirgusosakekestest võimaldab lahendada teisigi füüsika probleeme.

Planck'i valemi tuletus (tõestus). Eeldused:

- Vibraatori energia sagedusel ω saab muutuda vaid $n\hbar\omega$ korda, kus n on täisarv.
- Vibraatori oleku tõenäosus sõltub tema energiast vastavalt Boltzmanni valemile:

$$P(E = n\hbar\omega) = P_0 e^{-\frac{n\hbar\omega}{kT}},$$

kus P_0 on põhiolekus $E = 0$ olevate vibraatorite arv.

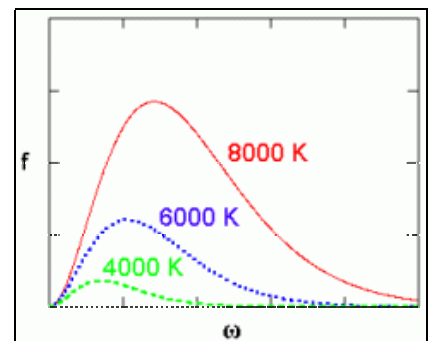
- Antud sagedusel kiiratav energia on võrdne seda sagedust omavate vibraatorite koguenegiaga.

Planck'i valem on saadud eeldusel, et ostsillaatori poolt kiiratav energiahulk on määratud kiiratava valguse sagedusega.

Tähelepanu: kaks fundamentaalkonstanti - gravitatsioonikonstant ja Planck'i konstant - on väga sarnaste tüvenumbritega.

Meeldejätmiseks:

- väiksem on Planck -- 6.63,
- suurem aga gravitatsioon -- 6.67.



Planck'i spektrid kolmel erineval temperatuuril.

Kõvera alla jääv pindala on võrdeline temperatuuri neljanda astmega

Planck'i valemi tuletamisel kasutame lõpmatute ridade teooriat. **NB!** See tuletus kuulub kohustuliku materjali hulka.

Arvutame vibraatori keskmise energia:

$$\begin{aligned}\bar{E} &= \frac{\sum E_i}{N} = \frac{E_0 + E(\hbar\omega) + E(2\hbar\omega) + \dots}{P_0 + P_1 + P_2 + \dots} = \\ &= \frac{P_0 \cdot 0\hbar\omega + P_1 \hbar\omega + P_2 \cdot 2\hbar\omega + \dots}{P_0 + P_1 + P_2 + \dots} = \\ &= \frac{P_0 \cdot 0 + P_0 e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}} \cdot \hbar\omega + P_0 e^{-\frac{2\hbar\omega}{kT}} \cdot 2\hbar\omega + P_0 e^{-\frac{3\hbar\omega}{kT}} \cdot 3\hbar\omega + \dots}{P_0 + P_0 e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}} + P_0 e^{-\frac{2\hbar\omega}{kT}} + P_0 e^{-\frac{3\hbar\omega}{kT}} + \dots}\end{aligned}$$

Taandame P_0 ning tähistame $x = e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}$.

Kõik e kõrgemad astmed asenduvad nüüd x astmetega:

$$\bar{E} = \frac{\hbar\omega(0 + x + 2x^2 + 3x^3 + \dots)}{1 + x + x^2 + x^3 + \dots} = \hbar\omega \frac{S_n}{\Sigma_n}.$$

Ja nüüd tuleb matemaatiline fookus. Arvutame avaldise:

$$\begin{aligned}x(S_n + \Sigma_n) &= \\ &= x(0 + 1) + x(x + x) + x(2x^2 + x^2) + x(3x^3 + x^3) + \dots = \\ &= x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \dots,\end{aligned}$$

mis lõpmatu rea korral võrdub lugejas oleva summaga S_n !

Edasi käib lihtne algebra. Võrdusest $x(S_n + \Sigma_n) = S_n$ saame

$$x = \frac{S_n}{S_n + \Sigma_n} \implies x^{-1} = \frac{S_n + \Sigma_n}{S_n} = 1 + \frac{\Sigma_n}{S_n}$$

$$\bar{E} = \hbar\omega \frac{S_n}{\Sigma_n} = \frac{\hbar\omega}{x^{-1} - 1} = \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}.$$

Pannes selle Rayleigh'-Jeans'i valemisse asendamaks ostsillaatori "termodünaamilist energiat" kT , saamegi Plancki valemi.

Fotoefekti teooria. Footonid. Planck ise pidas oma valemit vaid tarvmeelseks arvutusvõtteks, mis ju väga vale polegi. Alles A. Einsteini poolt 1905. a. leitud rakenduste seeria hakkas viima mõtteid sellele, et kvant (lad. *quantum* - ports, kogus) kui valguse osake võiks realselt eksisteerida. Einsteini kiirgusülekande valemid kuuluvad pigem kvantmehaanika valdkonda, seepärast praegu vaid ühest kõige efektsemast valemist.

Kvanthüpoteesi esimeseks rakenduseks ning ka kõige veenvamaks tõestuseks on Albert Einsteini poolt 1905.a. esitatud fotoefekti teooria.

Fotoefektiks nimetati elektronide väljumist metallist valguse toimet. Uurijad märkasid, et mitte igasugune valgus ei mõju antud metalli elektronidele, vaid alati on olemas kindel maksimaalne lainepikkus (nn. fotoefekti punapiir), millest pikematel lainetel valgus metallile enam ei mõju, olgu ta kuitahes suure intensiivsusega.

Laineteooria seda seletada ei suutnud - pidi ju energia pidev neeldumine lõpuks ikkagi mõne elektroni vabastama. Punapiir oli eri metallidel erinev: kõige väiksem tseesiumil ja teistel leelismetallidel, raual seevastu kaugel röntgenikiirte piirkonnas.

Einstein seletas asja lihtsalt:

et aine koosneb aatomitest, vabaneb elektron vaid siis, kui temale antav energia ületab elektroni metalliga siduva jõu potentsiaalse energia.

Valemist $E = \hbar\omega$ lähtudes saab seda teha vaid kiirgus, mille kvandi energia (Plancki valemi järgi on see võrdeline sagedusega) on suurem elektroni potentsiaalsest energiast. Viimane on eri metallidel erinev ja seetõttu on erinev ka piirsagedus.

Kui pealelangeva valguse sagedus on väiksem (lainepikkus suurem) energiast E_{pot}/\hbar , vabu elektrone ei teki. Kui energia on suurem, kehtib valem

$$\hbar\omega = A_v + \frac{mv^2}{2}.$$

See ongi Einsteini valem; konstant $A_v \equiv E_{pot}$ aga kannab **väljumistöö** nime.

Lihtne ja loogiline, nagu kõik noore Einsteini asjad. Ainult et siin pole "kvant" enam arvutuslik vahend, vaid reaalne, mõõdetav füüsikaline objekt. Talle anti ka nimi - **footon**. Valguse osake.

Aga mitte enam korpuskel! See on **laine osake**, midagi uut inimitunnetuse jaoks. Oli sündinud esimene **dualistlik** (lad. *duālis*-kahene) füüsikaline objekt.

Bose versus Boltzmann. Tuleme veel kord Planck'i valemi juurde. Tema põhiline erinevus Maxwelli jaotusega võrreldes on

eksponentliikme $\exp(-\frac{E_A}{kT})$ asendumine suhtega $\frac{1}{\exp(\frac{E_A}{kT}) - 1}$ -ga. Vastavalt saame ka kaks statistilist jaotust

$$n = n_0 e^{-\frac{E_A}{kT}} \iff n = n_0 \frac{1}{e^{\frac{E_A}{kT}} - 1}.$$

Neist vasakpoolne käis aatomite-molekulide kohta, parempoolne aga peaks kirjeldama footonite jaotust energiatega järgi.

Footon ehk "valguskvant" on aine (keskkonna) poolt kiiratud või neelatud minimaalne energiakogus, mis on võrdeline kiiratud valguslaine sagedusega.

Planck'i konstant

$$h = 6.63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$$

on sagedust kvandi energiaga siduv võrdetegur,

üks looduse põhikonstante.

Kaasaegne füüsika loeb footonit iseseisvaks (elementaar)osakeseks. Elementaarosakeste teoorias tuletatakse Planck'i jaotus osakeste (antud juhul footonite) eristamatuse printsiibist.

Selliseid osakesi nimetatakse **bosoniteks**, vastavat jaotusfunktsiooni **Bose-Einsteini jaotuseks**.

Hiljem, kui kvantmehaanikat tehti, tuli välja, et Boltzmanni valem on märksa fundamentaalsemate statistiliste jaotuste piirjuht.

Üks neist on meil käes - see on nn. **Bose-Einsteini jaotus**, mis kvantmehaanikas kirjeldab **mitteeristatavaid** osakesi. Teisest tuleb juttu järgmises peatükis.

Piirjuht tähendab aga seda, et kui $E \gg kT$, on nimetajas olev eksponent palju suurem talle liidetavast ühest. Jätame selle ära ning saamegi Boltzmanni valemi.