Loeng 15. Sundvõnked ja vahelduvvool.

Liikumisvõrrand harmooniliselt muutuva jõu korral. Olgu meil võnkumisvõimeline süsteem, mille liikumist kirjeldab diferentsiaalvõrrand

$$\ddot{l} + 2\beta\dot{l} + \omega_0^2 l = 0.$$

Nagu eelmises loengus leidsime, on selle võrrandi lahendiks eksponentsiaalselt kahaneva amplituudiga võnkumised

$$l = l_0 e^{-\beta t}\sin(\omega_v t + \varphi_0),$$

kus

$$\omega_v^2 = \omega_0^2 - \beta^2.$$

(ω_0 on sagedus, millega võnguks süsteem takistava jõu puudumisel. Et tegu on süsteemi olulise parameetriga, nimetame teda edaspidi **süsteemi omasageduseks**.)

Vaatleme juhtu, kus sellele süsteemile mõjub harmooniliselt muutuv jõud $f = f_0 \sin\omega t.$ Süsteemi liikumist kirjeldab nüüd **mittehomogeenne** teist järku diferentsiaalvõrrand

$$\ddot{l} + 2\beta\dot{l} + \omega_0^2 l = f_0 \sin\omega t.$$

Muidugi on ka selliste võrrandite lahendamiseks terve teooria, meie katsume lihtsamalt läbi ajada.

Sundvõnked tekivad võnkumisvõimelises süsteemis harmooniliselt muutuva välisjõu toimel.

Süsteemile mõjuvat välisjõudu nimetame **sundivaks jõuks**.

Sundvõnked. Oletame, et süsteem hakkab võnkuma sundiva jõu sagedusega ning selle võnkumise amplituudi l_S ja algfaasi φ_0 määravad sundiva jõu amplituud f_0 ning võnkuva süsteemi parameetrid: omasagedus ω_0 ja sumbuvustegur β

$$l = l_S \sin(\omega t + \varphi_0)$$

Püüame leida konstandid l_S ja φ_0 . Teeme seda vanaviisi: võtame tuletised

$$\dot{l} = \omega l_S \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Süsteemi parameetriteks on **omasagedus** ja **sumbuvustegur**; need leitakse vabavõngete võrrandist sundiva jõu puudumisel.

$$\ddot{l} = -\omega^2 l_S \sin(\omega t + \varphi_0)$$

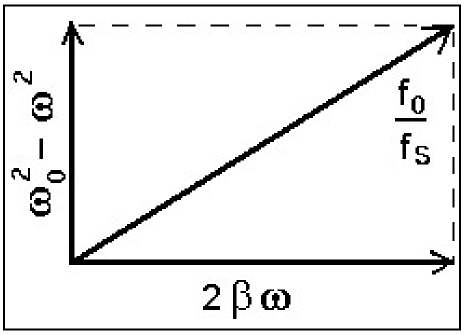
saame

$$-\omega^2 l_S \sin(\omega t + \varphi_0) + 2\beta\omega l_S \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$+\omega_0^2 l_S \sin(\omega t + \varphi_0) = f_0 \sin \omega t.$$

Grupeerime vasaku poole liikmeti:

$$(\omega_0^2 - \omega^2)\sin(\omega t + \varphi_0) + 2\beta\omega \cos(\omega t + \varphi_0) = \frac{f_0}{l_S} \sin \omega t.$$



Sundvõngete faasidiagramm: siinusfunktsiooni kordaja on y -teljel, koosinusliikme oma x -teljel. Et lahend vastaks lähtevõrrandile, peab nende summa olema võrdne sundiva jõuga.

Joonistame nüüd sellele vastava faasidiagrammi ning kasutades Pythagorase teoreemi saame

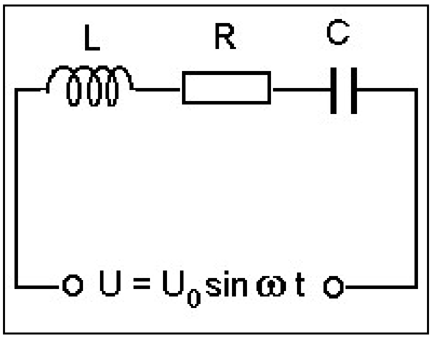
$$\left(\frac{f_0}{l_S}\right)^2 = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2,$$

millest leiame sundvõngete amplituudi

$$l_S = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2}}.$$

Faasinihke φ_0 sundiva jõu f suhtes leiame tangensist

$$\varphi_0 = \arctan \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$



Vahelduvvooluring.

Näeme, et nii faasinihe kui amplituud sõltuvad sundiva jõu sageduse ning süsteemi omasageduse vahest. Kui see on null, on faasinihe $\frac{\pi}{2}$ ning amplituud maksimaalne:

$$l_{\max} = \frac{f_0}{2\beta\omega}.$$

Väikese sumbuvusteguri β korral võib l omandada küllalt suure väärtuse. Seda olekut nimetatakse *resonantsiks*.

Elektrilised sundvõnked. Vaatleme vooluringi, kus harmooniliselt muutuva elektromotoorjõu allikaga on jadamisi ühendatud kondensaator, induktiivpool ja tavaline (oomiline) takisti. Kui vooluallikat poleks, oleks tegu eelmises loengus käsitletud võnkeringiga. Kirjutame selle ahela võrrandi, lähtudes Kirchoffi II reeglist:

$$U_L + U_R + U_C = U_0 \sin \omega t$$

ehk

$$L\dot{I} + RI + \frac{q}{C} = U_0 \sin \omega t.$$

Asendades voolutugevuse $I = dq/dt = \dot{q}$ ning jagades võrrandi mõlemaid pooli L-ga, saame võrrandi

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = \frac{U_0}{L}\sin \omega t,$$

mis on matemaatiliselt identne eespool toodud sundvõnkumiste võrrandiga. Selle lahendiks on (analoogselt eelnevaga):

$$q = q_{S'} \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$q_S = \frac{\frac{U_0}{L}}{\sqrt{(\frac{1}{LC} - \omega^2)^2 + (\frac{R\omega}{L})^2}} = \frac{U_0}{\omega\sqrt{(\frac{1}{\omega C} - \omega L)^2 + R^2}} \ ,$$

$$\varphi_0 = \arctan \frac{\omega L - \frac{I}{\omega C}}{R}$$

Võrrand kirjeldab kondensaatoril oleva laengu muutumist meie poolt uuritavas võnkeringis harmooniliselt muutuva elektromotoorjõu mõjul.

Vahelduvvool. Nii tööstus kui olmetehnika kasutavad valdavalt vahelduvvoolu, mis tekib magnetväljas pöörlevas mähises genereeritava induktsiooni elektromotoorjõu mõjul. Kui generaator töötab stabiilse kiirusega, muutub tekkiv elektromotoorjõud võrdeliselt pöördenurga siinusega, seega **harmoonilise võnkumise seaduse kohaselt**.

Vooluringis kulgevat vahelduvvoolu võib matemaatiliselt käsitleda kui elektrilisi sundvõnkumisi.

On loogiline oletada, et harmooniliselt võngub ka voolutugevus. Meie poolt leitud "laengu võnkumise valem" näib seda kinnitavat. Et voolutugevus on defineeritud kui laengu tuletis aja järgi, võtame saadud valemist tuletise:

Vahelduvvooluahela takistus jaguneb aktiiv- ja reaktiivtakistuseks; viimane koosneb induktiiv- ja mahtuvuslikust takistusest.

$$\frac{dq}{dt} \equiv \dot{q} = \omega q_S \cos(\omega t + \varphi_0) = I_S \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Suurust I_S võime vaadelda kui voolutugevuse amplituudväärtust. Nagu näeme, on ta võrdeline pinge (elektromotoorjõu?) amplituudväärtusega U_0:

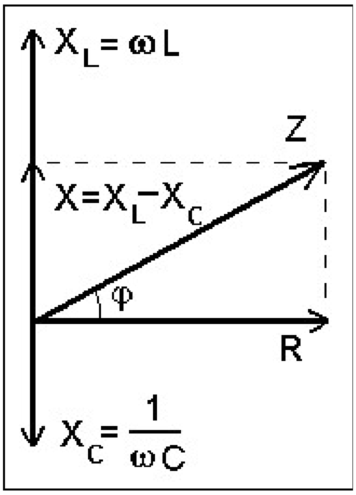
$$I_S = \frac{U_0}{\sqrt{(\frac{1}{\omega C} - \omega L)^2 + R^2}},$$

Leitud valemites olevatel suurustel on vahelduvvoolu teoorias ka kindlad nimed:

- $X_C = \frac{1}{\omega C}$ mahtuvuslik takistus,
- $X_L = \omega L$ - induktiivtakistus,
- $X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$ - reaktiivtakistus,
- R - aktiivtakistus,
- $Z = \sqrt{X^2 + R^2}$ kogutakistus

Kui kirjutada meie valemid ümber neid tähiseid kasutades, saame Ohm'i seaduse üsna tuttaval kujul

$$I = \frac{U}{Z}$$



Kogutakistus faasidiagrammil.

Võime leida ka pinged (pingelangud) ahela üksikutel komponentidel:

- Kondensaator ("mahtuvuslik takistus"):

$$U_I = \frac{I}{\omega C} \left(= \frac{q\omega}{\omega C} = \frac{q}{C}\right);$$

- Induktiivsus ("induktiivtakistus"):

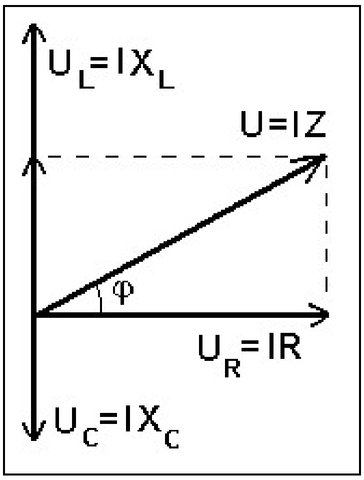
$$U_L = I\omega L = -\varepsilon_i$$

Need kaks pingelangu on alati vastasfaasis (st. vastasmärgilised!)

Pingelangud induktiiv- ja mahtuvuslikul takistusel on vastasfaasis.

Pingelang takistil (aktiiv- ehk oomiline takistus) tuleb nagu alalisvoolugi korral:

$$U_R = IR,$$



Vahelduvvoolu faasidiagramm. Kui võtsime laengust tuletise, jätsime tähelepanuta asjaolu, et tuletise võtmisel muutus faasiliikme siinus koosinuseks. Ega sellest midagi pole, harmooniliste võnkumiste kirjeldamiseks sobivad mõlemad funktsioonid. Küll aga tuleb meil seda arvestada faasidiagrammi joonistamisel.

Elektrimeestel on siin omad traditsioonid, mida tasub järgida. Vahelduvvoolu faasidiagrammidel on voolutelg (pingelang oomilisel takistusel) tavaliselt rõhtsuunas (*x*-telje kohal). Kuna vooluvektori projektsioon ***x***-teljele avaldub koosinuse kaudu, eelistatakse valemites koosinust siinusele.

Trigonomeetriast teame, et $\cos(x - 90^o) = \sin(x)$ ja $\cos(x + 90^o) = -\sin(x)$.

Võrdeliselt $\sin(x)$-ga muutus meie võnkeringis laeng (siis ka pinge!) kondensaatoril, temaga vastasfaasis ($-\sin(x) = sin(x + 180^o)$) aga induktsiooni elektromotoorjõud - pinge induktiivpoolil.

Nii ongi meie faasidiagrammil vooluvektor suunatud paremale, pingelang kondensaatoril alla ja pingelang induktiivsusel üles.

See, kuhu satub summaarne vektor ***U***, sõltub mahtuvusliku ja induktiivtakistuse vahekorrast:
• kui need on võrdsed (resonantsolukord), on vektorid ***U*** ja ***IR*** samasuunalised ning faasinihe $\varphi_0 = 0$.
• kui mitte, siis kas positiivne ($X_L > X_C$) või negatiivne ($X_L < X_C$).

Vahelduvoolu faasidiagramm.
Joonisel on induktiivtakistus mahtuvuslikust takistusest suurem ja faasinihe positiivne.

Resonantsid. Jadalülituse korral kehtib ülaltoodud valem:

$$I_S = \frac{U_0}{\sqrt{(\frac{1}{\omega C} - \omega L)^2 + R^2}},$$

kus $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ vastab ***Z_{min}*** , ***I_{max}***. Seega on resonantsolukorras ahela takistus minimaalne ning voolutugevus maksimaalne. Elektrotehnikas nimetatakse seda olukorda **pingeresonantsiks**.

Pingeresonants tekib jadalülituse, vooluresonants rööplülituse korral. Miks neid nii nimetatakse, küsige elektrimeestelt.

Vaatame nüüd sellist vahelduvvooluahela elementi, kus induktiivsus ja mahtuvus on lülitatud paralleelselt. Takistuste rööplülituse valemi järgi kehtib

$$\frac{1}{X} = \frac{1}{X_L} + \frac{1}{X_C} = \frac{1}{-\omega L} + \omega C = \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega L}.$$

Näeme, et

$$X = \frac{\omega L}{\omega^2 LC - 1} \to \infty \quad \text{kui} \quad \omega \to \sqrt{\frac{1}{LC}}.$$

See, et ahela takistus kasvab lõpmata suureks, tähendab voolu lakkamist. Elektrotehnikas nimetatakse sellist olukorda nim. *vooluresonantsiks*. Füüsikaliselt võime kujutleda, et vahelduvpinge ahela lahknemispunktis A genereerib paralleelharudes **vastasfaasis olevad elektrivõnked**, mistõttu punkti B potentsiaal saab nulliks.

Loomulikult pole tegelik takistus ei null ega lõpmatus. Igas ahelas on alati olemas ka oomiline e. aktiivtakistus R, mis muudab kogutakistuse nullist erinevaks. Vaadake faasidiagrammi: **resonantsolukorras võrdub kogutakistus Z alati oomilise takistusega R**.

Täpne resonantssagedus. Oomilise takistuse korral erineb vabavõngete sagedus ω_v omasagedusest ω_0. Resonantsitingimuses lähtusime seni omasagedusest, põhjendades seda liikme $\omega_0^2 - \omega^2$ minimaalväärtusega kogutakistuse valemis.

Tegelikult oleneb juurealuse avaldise väärtus mõlemast liikmest - kui esimese lähenemisel nullile muutub teine kiiremini, nihkub ka kogu avaldise miinimum nullpunktilt kõrvale.

ω_{res} täpse väärtuse saame ekstreemumtingimusest

$$\frac{d}{d\omega}\left(\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta)^2}\right) = \frac{\frac{d}{d\omega}(\omega_0^4 - 2\omega_0^2\omega^2 + \omega^4 + 4\beta^2\omega^2)}{-\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta)^2}}$$

Võttes lugejast tuletise ning võrrutades selle nulliga, saame:

$$-4\omega_0^2\omega + 4\omega^3 + 8\beta^2\omega = 0,$$

ehk

$$4\omega(-\omega_0^2 + \omega^2 + 2\beta^2).$$

Sagedust, mille korral kogutakistus on minimaalne, nimetatakse resonantssageduseks.

Näeme, et funktsioonil on kaks ekstreemumit:

$$\omega = 0; \quad -\omega_0^2 + \omega^2 + 2\beta^2 = 0.$$

Esimene neist tähendab harmooniliselt muutuva välisjõu puudumist, teisest saame

$$\omega^2 = \omega_0^2 - 2\beta^2.$$

Seega on täpne resonantssagedus $\omega_{res} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ - mõnevõrra väiksem vabavõngete sagedusest $\omega_v = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$.

Võimsus vahelduvvooluahelas. Et vahelduvvool kõigele vaatamata teeb ka tööd, tuleks leida valem selle töö - täpsemalt küll võimsuse - hindamiseks. Tavaline Joule-Lenz'i valem meid ei rahulda, kuna ei arvesta reaktiivvõimsustel (näiteks mootor või trafo) tehtavat tööd.

Vahelduvvooluahela võimsus sõltub lisaks pingele ja voolutugevusele ka faasinihkest.

Et leida võimsust, peame ahelale rakendatud elektromotoorjõu (võrgupinge) korrutama voolutugevusega, arvestades faasinihet:

$$P = IU = I_0 \sin\omega t \cdot U_0 \sin(\omega t + \varphi).$$

Rakendades trigonomeetriast summa siinuse valemit, saame

Võimsuse valemisse kuuluvat kordajat

$$P = \frac{dA}{dt} = I_0 U_0 \sin\omega t(\sin\omega t\cos\varphi + \cos\omega t\sin\varphi).$$

$\cos\varphi$ nimetatakse ahela võimsusteguriks.

Saime ajas muutuva suuruse, mis väljendab **hetkvõimsust** ajamomendil t ja millega pole suurt peale hakata.

Keskmise võimsuse leidmiseks integreerime saadud avaldist ühe perioodi vältel ning jagame siis perioodi väärtusega:

$$\bar{P} = \frac{I_0 U_0}{T}\left(\cos\varphi\int_0^T \sin^2\omega t dt + \sin\varphi\int_0^T \sin\omega t\cos\omega t dt\right).$$

Teine integraal on vastavalt perioodi definitsioonile $T = \frac{2\pi}{\omega}$ võrdne nulliga. Esimesest saame:

$$\bar{P} = \frac{I_0 U_0 \cos\varphi}{T\omega}\left(\frac{\omega T}{2} - \frac{\sin 2\omega T}{4}\right) = \frac{1}{2} I_0 U_0 \cos\varphi,$$

kuna $2\omega T = 4\pi$, millest siinus annab jällegi nulli.

Seega erineb vahelduvvooluahela keskmine võimsus alalisvoolu ahela omast teguri $\cos\varphi$ võrra. Seda faasinihkest sõltuvat tegurit nimetataksegi **võimsusteguriks**. Võimsus on seega maksimaalne, kui faasinihe on null.

Efektiivväärtused. Faasinihe tuleb sisse vaid siis, kui ahelas on nullist erinev reaktiivtakistus. Kui asi piirdub oomilise takistusega R, on $\varphi = 0$, $\cos\varphi = 1$ ning

$$\bar{P} = \frac{1}{2} U_0 I_0.$$

Vahelduvvoolu pinget ja voolutugevust võib esitada nii maksimaalväärtuse (amplituudi) kui efektiivväärtuse kaudu.

Efektiivväärtused defineeritakse sama võimsusega alalisvoolu abil. Nad erinevad pinge ja voolutugevuse keskväärtustest.

Tehnilises dokumentatsioonis antavad pinge ja voolutugevus on reeglina efektiivväärtused.

Vahelduvvoolu **efektiivväärtused** defineeritakse kui aktiivtakistusel sama võimsuse tekitava alalisvoolu (-pinge) väärtused. Tegur ***1/2*** jagatakse nende vahel võrdselt, saades

$$U_{ef} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}, \quad I_{ef} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}.$$

NB! Meile harjumuspärased $220V$ ja $380V$ on nimelt **efektiivväärtused**. Lisaks efektiivväärtustele võime leida ka vahelduvoolu keskväärtuse:

$$\bar{I} = \frac{1}{T}\int_0^T I_0 \sin\omega t dt = \frac{2I_0}{\pi} \simeq 0.63 I_0$$

.

Küsimus: Aga vahelduvpinge keskväärtus?

Tasub meeles pidada trigonomeetriliste funktsioonide keskväärtusi:

$$\bar{\sin}\,\alpha = \frac{2}{\pi} \simeq 0.63;$$

$$\bar{\sin^2}\,\alpha = \frac{1}{2} = 0.5;$$

$$\sqrt{\bar{\sin^2}\,\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0.707.$$

Kvaasistatsionaarsuse nõue. Kui võnkesagedus on väga suur, muutub oluliseks ka *potentsiaali hilinemine*. Nii nimetatakse elektroonikas aega, mis kulub elektrilisel signaalil jõudmiseks ahela ühest punktist teise. Et elektriväli levib juhtmetes praktiliselt valguse kiirusega, on normaalmõõtmetega ahelates see hilinemine väike.

Aga kui väike? Võttes sageduseks Euroopa võrgustandardi 50 Hz, saame näiteks kilomeetri pikkuse juhtme kohta hilinemise 1/300000 sekundit. See annab faasinihke juhtme otste vahel $\omega t = 0.001$ radiaani ehk 3.6 kaareminutit. Sellele vastav siinuse viga oleks 0.2%.

Vahelduvvoolu, mille puhul voolutugevuse faasi võib ahela kõigis punktides lugeda samaks, nimetatakse kvaasistatsionaarseks.

Kui aga arvutada faasinihet raadiosaatjas või arvutiskeemis taktsagedusel 100 MHz, muutub hilinemine oluliseks. Sellisel juhul meie valemid ei kehti ning tuleb lähtuda lainefüüsikast.

Inseneriarvutustes kasutatakse omamoodi "kirvereeglit", mida nimetatakse kvaasistatsionaarsuse ("peaaegu statsionaarne") nõudeks. Vahelduvvooluringi tohib rehkendada siintoodud valemitega vaid juhul, kui aeg, mis kulub signaalil vooluringi läbimiseks, on alla sajandiku võnkeperioodist.

Valemina:

$$\frac{l}{c} < 0.01T = \frac{0.02\pi}{\omega}.$$

c = 300000 km/s on valguse kiirus.

Kompleksarvude meetod. Elektrotehnikas kasutatakse vahelduvvoolu rehkendamisel sageli kompleksarve. Sellel on kaks põhjust.

- Kompleksarvude abil saab esitada võnkumisi eksponentfunktsiooniga, mille integreerimine-diferentseerimine on märksa lihtsam kui trigonomeetriliste funktsioonide korral.

- Kompleksarvu geomeetriline kuju vastab täpselt faasivektori ideoloogiale võnkumiste liitmisel

Alustame viimasest. Kujutame näiteks voolutugevust kompleksarvuga (et kompleksarvu tavalisest eristada, paneme vastavale sümbolile "katuse" peale)

$$\hat{I} = I_{Re} + iI_{Im}.$$

Nagu matemaatikas õpitud, saab kompleksarve anda ka nn. **trigonomeetrilises kujus**:

$$\hat{I} = I_S \cos\varphi + iI_S \sin\varphi.$$

Arvutuste lihtsustamiseks võib võib vahelduvvoolu pinget ja voolutugevust esitada kompleksarvudega.

I_S on kompleksarvu **moodul**, φ aga **argument**.

Kui argument on võrdeline ajaga, saamegi komplekstasandil pöörleva vektori $\hat{I}$, mille reaal- ja imaginaarosa muutuvad harmoonilise võnkumise võrrandi kohaselt.

Euleri valem (vt. lisateksti) lubab kompleksarve esitada eksponentfunktsiooni kujul.

Et kirjapilti veelgi lihtsamaks teha, teisendame meie kompleks-voolu eksponentfunktsiooniks, kasutades **Euleri valemeid** (vt. lisatekst)

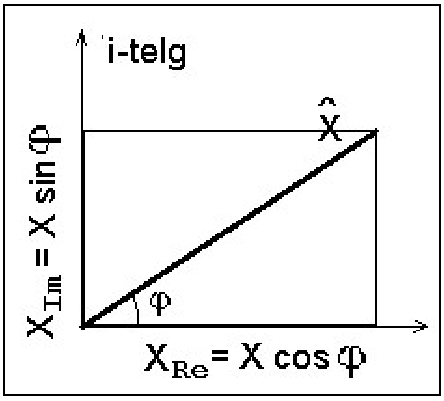
$$\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$$

ning asendame $\varphi = \omega t$, saades

$$\hat{I} = I_S e^{i\omega t}.$$

Kui võtta sellest tuletis ja korrutada induktiivsusega, saame pingelangu induktiivpoolil:

$$L\frac{d\hat{I}}{dt} = \hat{U}_L = L\frac{d}{dt}(I_S e^{i\omega t}) = i\omega L I_S e^{i\omega t} = i\omega L\hat{I}.$$



Kompleksarvu trigonomeetriline kuju on samaväärne faasidiagrammiga (*phasor*'iga).

Pinge kondensaatoril leiame, jagades laengu mahtuvusega. Et laeng on voolutugevuse integraal (tuletise pöördtehe!), saame

$$\hat{U}_C = \frac{1}{C}\int \hat{I}dt = \frac{1}{C}\int I_S e^{i\omega t} = \frac{1}{i\omega C} I_S e^{i\omega t} = -i\frac{1}{\omega C}\hat{I}.$$

Miks on $1/i = -i$? Mõelge ise välja!
Vihje: tuletage meelde, kuidas defineeritakse imaginaarühik.

Pingelang takistil on loomulikult "tavaline"

$$\hat{U}_R = \hat{I}R.$$

Ja nüüd võtame nad kõik kokku Kirchoff'i reegliks:

$$\hat{I}R + i\omega L\hat{I} - i\frac{1}{\omega C}\hat{I} = \hat{U}.$$

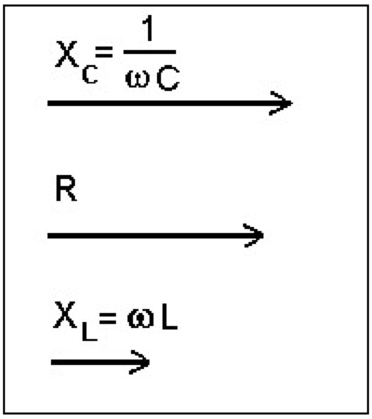
Kui tuua $\hat{I}$ sulgude ette, saamegi Ohm'i seaduse vahelduvvooluahela jaoks:

$$\hat{I}\left[R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right] = \hat{U} = \hat{I}\hat{Z},$$

kus

$$\hat{Z} = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + iX$$

kannab nime **komplekstakistus**.



Komplekstakistus faasidiagrammil. Vektor Z (katusega) joonistage ise.

Kuidas selle põhjal teha faasidiagrammi, katsuge ise välja mõelda. Kui valmis, võrrelge ülaltoodutega.

Kasutades kompleks-sümboolikat, võime vahelduvvooluahelaid rehkendada alalisvoolu valemitega.

Küsimus: Kas oskate sama metoodikat kasutada näiteks harmooniliste võnkumiste liitmisel?