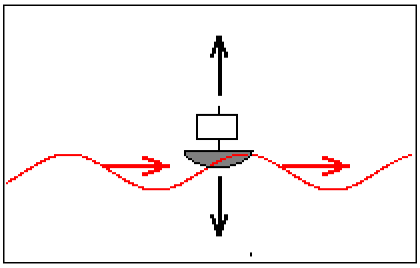
Loeng 16. Lained

Lainetus on üks liikumise liike: merepinnal liikuvaid laineharju pidasid vana-aja inimesed omaette olenditeks - need sündisid veest ja tuulest, läbisid oma rännuteel saari ja sadamaid ning hääbusid lõpuks rannaliival.

Füüsikuid-filosoofe pani kõige rohkem imestama, et lainetega ei kaasnenud liikumist selle tavapärases, aine (massi) edasikandumise mõttes. Lainetaval veepinnal olev laev jäi paigale, kõikudes lainetega samas rütmis. Mõnes mõttes käitusid lained liikuvate kehade sarnaselt: kohates takistust, põrkab laine tagasi ja jätkab liikumist vastassuunas; nurga all põrgates aga käitub nagu piljardikuul (langemisnurk võrdub põrkenurgaga). Teiselt poolt, lainete omavahelisel põrkel ei juhtu mitte kui midagi - pärast kohtumist levivad lained edasi nii, nagu poleks teist lainet olemaski...

Lainetus (kulgev laine) erineb tavapärasest (kulg)liikumisest selle poolest, et temaga ei kaasne kehade ümberpaiknemine (kehade asukoha muutus).



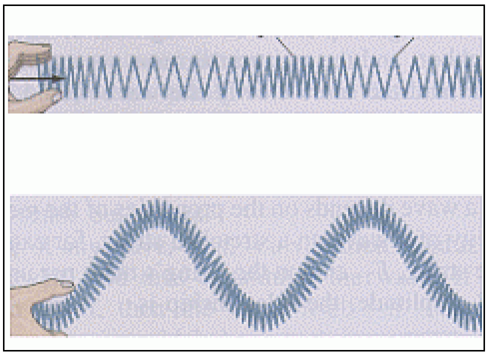
Laevuke lainetaval veepinnal.

Mõõtmistega saab näidata, et lainetava veepinna osakesed jäävad "keskmiselt paigale", sooritades võnkeid tasakaaluasendi ümber. Täpselt sama juhtub, kui raputada ühest otsast kinnitatud nööri. Tekkiv võnkumine on korrastatud, st. iga osakese võnkefaas sõltub lisaks ajale ka asukohast.

Lainetavas keskkonnas toimub osakeste korrastatud võnkumine.

Laineid on erinevaid, uurimise lihtsustamiseks saab neid mitmel viisil liigitada. Tuntuim liigitus on **rist- ja pikilained** (viitab laine levikusuuna ja osakeste võnkesuuna vahelisele nurgale), merelained kuuluvad **pinnalainete** liiki, valgus ja röntgenikiired **elektromagnetlainete** hulka.
Kvant-teooria kasutab väljendeid *pilootlaine, tõenäosuslaine* jms.; väga tuntud on **häälelained**. Olemas on isegi selline kummaline objekt nagu **seisevlaine**.

Kui keskkonnaosakesed võnguvad risti laine liikumissuunaga, nimetatakse lainetust *ristlaineks*; kui samas sihis, siis *pikilaineks* .

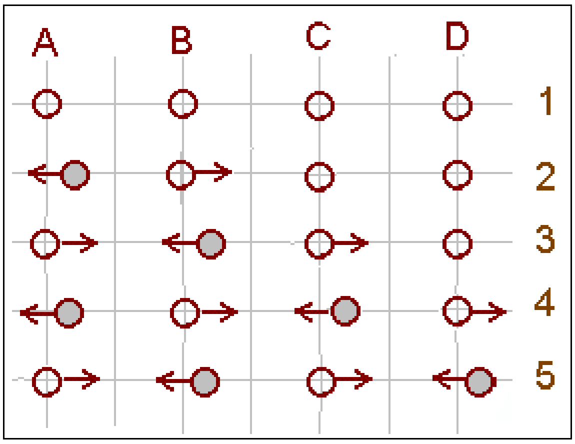


Pikilaine ja ristlaine

Oma füüsikakursuses käsitleme kõige lihtsamat lainetuse liiki - ühtlases keskkonnas levivaid **elastsuslaineid**. Leitud võrrandeid kasutatakse kõigi teiste lainetuse liikide kirjeldamisel - täpselt niisamuti, nagu harmoonilisi võnkeid keeruliste perioodiliste liikumiste korral.

Elastsuslaine tekib keskkonnas, mille osakesed on püsivas tasakaalus (aatomid kristallvõres, molekulid vedeliku pinnal) juhul, kui mõne(de) osakes(t)e kohalt nihutamine rikub süsteemi tasakaalu. Paigaltnihutatud osakese ja naaberosakeste vahel tekivad sel juhul elastsusjõu tüüpi jõud, mis

- sunnivad paigaltnihutatud osakest pöörduma tagasi tasakaaluasendisse;
- nihutavad paigalt naaberosakesed.



1 -- *osakesed on tasakaalus*
2 -- *A nihutati paigast*
3 -- *AB vaheline tõukejõud on nihutanud B edasi ja sundinud A liikuma tagasisuunas*
4 -- *B on nihkunud tagasi C ja A edasi,*
5 -- *A nihkus tagasi, B edasi, C tagasi, D edasi.*

Võnkumiste levik osakeste vahelise jõu mõjul.
Nihkunud osakesed on tumedamad, noolekesed näitavad jõudusid.

Pärast mõnesid võnkeid selline süsteem tasakaalustub, kuna energiakaod on paratamatud.

Iseasi on siis, kui võnkuv punkt saab energiat juurde, näiteks harmoonilise jõu allikalt. Sellisel juhul kandub võnkumine keskkonda ja tekib **ruumis leviv lainetus**.

> **Laineks nimetame keskkonna osakeste võnkumist, kus võnkefaas sõltub allika kaugusest siinus (koosinus) funktsiooni järgi.**

Lainevõrrand. Seega kirjeldab lainet valem

$$l(x,t) = a\sin(\omega t - kx),$$

kus ω, k on konstandid, t väljendab aega ja x on ruumikoordinaat. Suurust kx võib vaadelda kui *kaugusest sõltuvat algfaasi* - või, teiste sõnadega, *faasinihet*, kus k on faasikonstant.

Siinuslaines sõltub osakese võnkefaas lisaks ajale ka asukohast (ruumikoordinaatidest):

> **mistahes kahe osakese faasinihe on võrdeline nende osakeste vahelise kaugusega.**

Samas faasis olevate keskkonnapunktide jaoks kehtib nüüd

$$\omega t - kx = const,$$

ehk

$$\frac{d}{dt}(\omega t - kx) = 0.$$

Võtnud tuletise, saame

$$\omega - k\frac{dx}{dt} = 0.$$

X -telje suunas leviva laine võrrand on kahe muutuja - kauguse ***x*** ja aja ***t*** - harmooniline funktsioon.

Faasikiirus. Suurust $v = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}$ võime käsitleda **laine levimiskiirusena** - niisuguse kiirusega liigub (näiteks) lainehari veepinnal.
Muidugi liiguvad sama kiiresti ka lainepõhjad ja üldse suvalise **konstantse faasiga** punktid. Seetõttu nimetataksegi meie poolt leitud kiirust v **faasikiiruseks**.

Laineharja liikumiskiirust nimetame **faasikiiruseks**; sama kiirusega näivad liikuvat ka teised konstantse võnkefaasiga punktid.

Kui keskkond on homogeenne ja võnkumised toimuvad ainult ühe sagedusega, on nii ω kui k konstantsed kõigis punktides ja igal ajal. Kirjutades k asemele ω/v, saame **lainevõrrandi** kujul:

$$l(x,t) = a\sin\omega(t - \frac{x}{v})$$

Meelde jätta!

$$faasikiirus = \frac{\text{lainepikkus}}{\text{periood}}$$

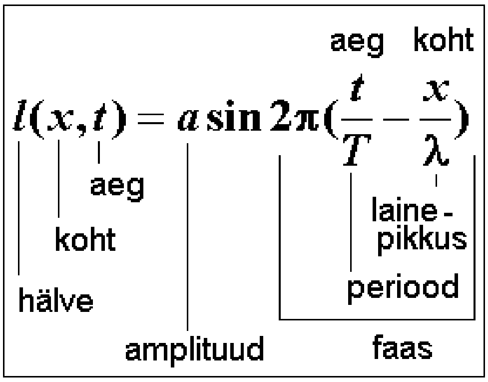
$$= \frac{\text{nurksagedus}}{\text{lainearv}}$$

Tuletage nende dimensioonid!

Lainepikkus. Asendame nurksageduse ω perioodi T kaudu ($\omega = \frac{2\pi}{T}$) ja toome sisse uue suuruse, mis võrdub kaugusega kahe laineharja vahel - **lainepikkuse** $\lambda = Tv$. (Kaugus kahe laineharja vahel võrdub tee pikkusega, mille laine läbib sama ajaga, kui osake teeb ühe täisvõnke.)

Meie valem saab nüüd sümmeetrilise kuju:

$$l(x,t) = a\sin 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}).$$



***X*-telje suunas leviva tasalaine võrrand perioodi *T* ja lainepikkuse λ kaudu.**

Siit on hästi näha lainetusprotsessi korrastatus: valides kindla ajmomendi $t = const$, saame valemi

$$l(x) = a\sin(\frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi_t),$$

kus osakeste hälve on **ruumikoordinaadi harmooniline funktsioon** ning faasinihe on määratud vaatlusmomendiga. Analoogiliselt saame suvalises keskkonna punktis meile hästi tuntud **harmoonilise võnkumise**

$$l(t) = a\sin(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_x),$$

kus hälve sõltub ajast ning algfaas vaadeldava punkti asukohast.

Lainevõrrand lausa nõuab aja ja ruumi samaväärsust. Just siit viib tee relatiivsusteooriasse, aga ka kvantmehaanikasse. Kõik oleneb sellest, kuidas saadud valemit tõlgendada. Saadud on valem aga puhtempiiriliselt, looduslikku lainetust jälgides.

Tasalaine ja lainearv. Senitoodud valemid kehtivad x-telje suunas leviva tasalaine kohta.

> **Tasalaineks nimetame lainet, mille samafaasipinnad on tasandid.**

Tasalaine, mille samafaasipindadeks on lõpmatu ulatusega tasandid, on arvutusi lihtsustav idealisatsioon.

Loomulikult on selline lõpmatute tasapinnaliste "harjadega" laine idealisatsioon. Reaalsed lained on kas sfäärilised või väga keeruka kujuga.

Tasalaine valemit on lihtne üldistada suvalises suunas levivale lainele. Lähtepunktist O kaugusel $\vec{r}$ asuva punkti faasinihke võime kirjutada

$$\varphi_{\vec{r}} = \frac{x}{\lambda} = \frac{r\cos\alpha}{\lambda},$$

kus α on nurk laine levimissuuna $\vec{n}$ ja meie poolt valitud punkti kohavektori $\vec{r}$ vahel.
Lainevõrrandiks saame

$$l(\vec{r},t) = a\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r\cos\alpha}{\lambda}\right) = a\sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r\cos\alpha\right)$$

Et

$$\lambda = vT = v\frac{2\pi}{\omega},$$

siis

$$\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v} = k$$

ning me võime defineerida **lainearvu** $\vec{k}$ kui vektori, mille suund ühtib laine levimissuunaga.

Suunas $\vec{r}$ leviva tasalaine võrrand avaldub seega kujul:

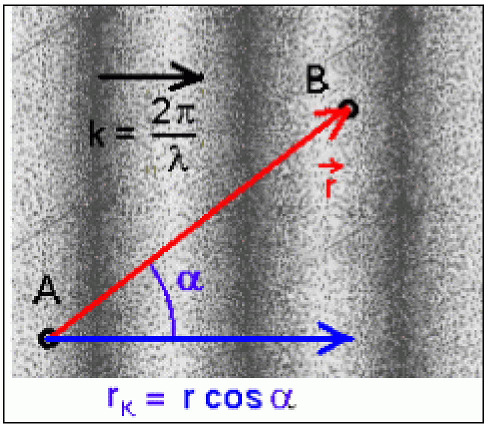
$$l(\vec{r},t) = a\sin(\omega t - \vec{k}\vec{r}).$$

Laine energia. Konstantse amplituudiga lainetusest haaratud ühtlase keskkonna koguenergia võrdub kõigi võnkuvate osakeste energiate summaga. Et ühe võnkuva osakese energia avaldub kujul $E = \frac{1}{2}ma^2\omega^2$, siis tuleb kõigi ruumalas V asuvate osakeste koguenergia just nii palju suurem, kuivõrd on selles ruumalas olevate osakeste kogumass Σm suurem ühe osakese massist:

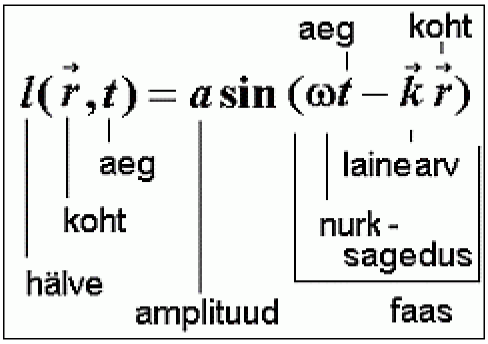
$$E = \frac{1}{2}a^2\omega^2\sum m = \frac{1}{2}a^2\omega^2\varrho V,$$

kus ϱ on aine tihedus. Võime arvutada ka energiatiheduse laines, jagades koguenergia koguruumalaga:

$$u = \frac{E}{V} = \frac{1}{2}\varrho a^2\omega^2.$$



Tasalaine vektoresitus.
Korrutis $\vec{k}\vec{r} = kr\cos\alpha = 2\pi r_k/\lambda$ näitab faasi, st. mitu täislainet mahub punktide **A** ja **B** vahele.



Ruumis leviva tasalaine võrrand nurksageduse ω ja lainearvu $\vec{k}$ kaudu.

Energiavoog laines. Et lainetus levib, kaasneb tema liikumisega ka energia levik. Analoogselt vee vooluhulgale läbi vooluga risti oleva pinna

$$\Phi = \frac{\varrho dV}{dS dt} = \frac{\varrho dS dl}{dS dt} = \varrho v$$

võime defineerida **laine energiavoo tiheduse**

$$\vec{j} = u\vec{v} = \frac{1}{2}\varrho a^2 \omega^2 \vec{v}.$$

Lainetuse poolt edasi kantavat energiat kirjeldab **energiavoo tiheduse vektor**, mis on võrdeline keskkonna tiheduse ja laine levimiskiirusega ning osakeste võnkeamplituudi ja -sageduse ruutudega.

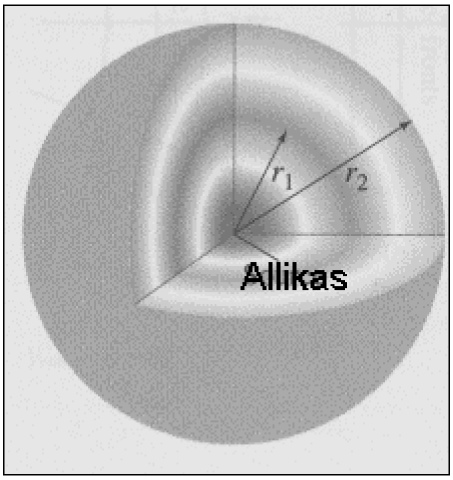
Vektori suund ühtib laine levikusuunaga.

Energiavoo läbi suvalise pinna saame nüüd leida integraaliga

$$\Phi = \int_S \vec{j} d\vec{S}.$$

Küsimus: Kõik kolm vektorit - lainearv, laine kiirus ja energiavoo tihedus - on samasuunalised, seega erinevad vaid skalaarse kordaja võrra. Kas oskate leida need kordajad?

Keralaine. Lainefüüsika rakendustes lähtutakse tavaliselt punktikujulisest laineallikast (lühemalt: *punktallikast*). Sellise allika ümber levivate lainete samafaasipinnad pole tasase, vaid sfäärilise kujuga, mistõttu vastavat lainet nimetatakse **keralaineks**.



Keralaine punktikujulise laineallika ümber.

Kuna punktallikas, mille võnkeamplituud ajas ei muutu, kiirgab võrdsetes ajavahemikes lainena ruumi konstantse energiahulga, ei saa selline laine olla konstantse amplituudiga. Punkti ümber leviva keralaine summaarne energiavoog jääb küll kõigil kaugustel samaks, see-eest aga kahaneb energiavoo tihedus vastavalt kerapinna $S = 4\pi R^2$ suurenemisele. Kaugusel r on energiavoo tihedus järelikult r^2 korda väiksem:

$$\vec{j}(r) = u\vec{v} = \frac{u_0}{r^2}\vec{v} = \frac{1}{2}\varrho \frac{a^2}{r^2}\omega^2 \vec{v}.$$

Et kõik lainet iseloomustavad suurused peale amplituudi on konstandid, peab keralaine valem olema:

$$l(r,t) = \frac{a}{r}\sin(\omega t - kr),$$

- muidugi juhul, kui laineallikas (punktallikas!) asub koordinaatide alguspunktis.

Keralaine amplituud väheneb võrdeliselt allika kaugusega.

Laine diferentsiaalvõrrand. Kuna harmoonilised võnked olid kindlat tüüpi diferentsiaalvõrrandi lahendiks, võime küsida, millise võrrandi lahendiks on laine.
Võtame lainevõrrandist osatuletised koordinaatide järgi ja liidame kokku.

NB! Siintoodu ei ole laine diferentsiaalvõrrandi koostamine füüsikalises mõttes, vaid eelnevalt olemas oleva lahendi - tasalaine võrrandi - diferentseerimine.

Et

$$\frac{\partial}{\partial x}(\vec{k}\vec{r}) = \frac{\partial}{\partial x}(k_x x + k_y y + k_z z) = k_x,$$

siis

$$\frac{\partial^2 l}{\partial x^2} = -k_x^2 a \sin(\omega t - \vec{k}\vec{r}) = -k_x^2 l.$$

Analoogiliselt saame

$$\frac{\partial^2 l}{\partial y^2} = -k_y^2 l \text{ ja } \frac{\partial^2 l}{\partial z^2} = -k_z^2 l.$$

Pärast liitmist saame

$$\frac{\partial^2 l}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 l}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 l}{\partial z^2} = -(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) l,$$

Meelde jätta!

Tähis Δ ei märgi siin suuruse $\boldsymbol{l}$ muutu, vaid tähistab *Laplace'i diferentsiaaloperaatorit.*

ehk

$$\Delta l = -k^2 l,$$

kus

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

on **Laplace'i operaator** (vt. vektoranalüüs!) ja k lainearvu vektori $\vec{k}$ moodul.

Võrreldes saadut lainevõrrandi teist järku tuletisega aja järgi

$$\ddot{l} = \frac{\partial^2 l}{\partial t^2} = -\omega^2 l,$$

näeme, et

$$\Delta l = \frac{k^2}{\omega^2}\ddot{l},$$

ehk

$$\ddot{l} = \frac{\omega^2}{k^2}\Delta l,$$

mis ongi laine diferentsiaalvõrrand.

Laplace'i operaator on matemaatiline teisenduseeskiri, mis seab skalaarsele väljale $\boldsymbol{l}$ ($\vec{r}$) vastavusse tema teist järku tuletise ruumikoordinaatide järgi.
Kui see tuletis on võrdeline sama välja ajalise tuletisega, tekib lainevõrrand.

Mida arvata? Saadud võrrand sisaldab märksa rohkem, kui temalt oodati.

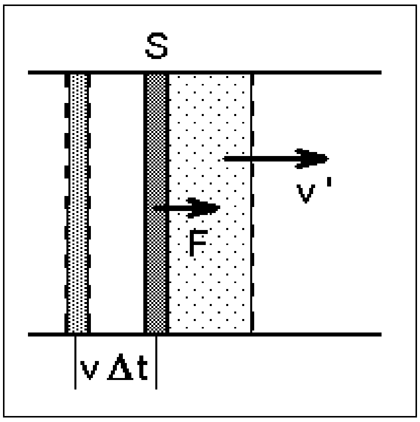
Vaadake: ta seob **ruumilist tuletist** $\Delta l \equiv \mathrm{div\ grad} l$ **ajalise tuletisega** $\ddot{l}$, kusjuures kordajaks on **laine levimiskiiruse ruut**

$$v^2 = \frac{\omega^2}{k^2}.$$

Tühjas ruumis leviva *elektromagnetlaine* korral on selleks kiiruseks **valguse kiirus** $c = \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ ja tagajärjeks nn. **Lorentz'i teisendus** - otsetee relatiivsusteooriasse.

Elastsuslaine kiirus. Senises jutus on faasikiirus määramata - me saime ta vabalt valitud lainearvu $\vec{k}$ ja keskkonnaosakeste omavõnkesageduse ω kaudu. Reaalsetes (elastsetes) keskkondades on põhisuuruseks just laine kiirus; lainepikkus aga sõltub sundiva jõu (võngete allika) sagedusest.

> **Laine põhiparameeter on sagedus; keskkonna omadused määravad lainete levikukiiruse ning alles nende kahe parameetri kaudu saab leida lainepikkuse.**



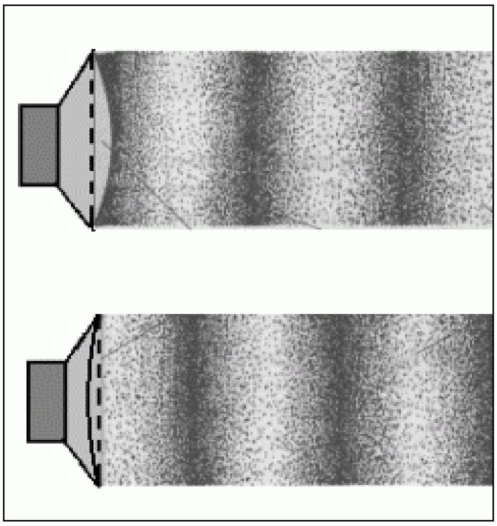
Elastsuslaine tekkimine liikuva kolvi ees.

Elastsete keskkondade jaoks on laine levimiskiirus (heli kiirus) määratud tihedushäirituse (lainefrondi, st. "esimese laine") liikumiskiirusega.

Kui hakkame liigutama joonisel kujutatud torus liikuvat kolbi, ei hakka liikuma kogu kolvi ees olev vedelik (gaas, tahke aine) korraga, vaid elastsuse tõttu jääb enamik ainest paigale, nihkub vaid kolvi lähedal olev osa. Taskaaluseaduse järgi peab rõhk torus tasakaalustuma; see aga võtab aega - häiritus levib kolvilt ruumi **lõpliku kiirusega**.

See ongi frondi kiirus, millega hakkab torus levima laine ja seda saab kõige lihtsamini arvutada impulsi jäävuse seadusest:

$$\vec{F}t = \Delta(m\vec{v}).$$



Sama asi praktikas: hääleleinete tekitamine valjuhääldaja võnkuva membraani abil.

Torus, kus jõud avaldub rõhkude vahena

$$F = (P_0 + \Delta P)S - P_0 S = S\Delta P$$

võime selle kirjutada kujul:

$$S\Delta P t = (\varrho S v t) v'$$

(sulgudes olev avaldis võrdub liikuma hakanud ainehulga massiga).
Kui jagada võrdust St-ga, saame $\Delta P = \varrho v v'$.

Nüüd on aeg sisse tuua elastsusjõud. Vedelikes ja gaasides on rõhumisjõud - järelikult ka rõhk - võrdeline suhtelise deformatsiooniga. Võrdeteguriks on nn. **ruumelastsusmoodul** B. Seega:

$$\Delta P = -B\frac{\Delta V}{V}$$

Paneme nüüd sellesse võrrandisse

$V = Sl = Sv't$

ning

$\Delta V = -S\Delta l = -Svt$ (miinus, kuna ruumala väheneb);

saades

$$\varrho vv' = -B\frac{-Svt}{Sv't} = B\frac{v}{v'},$$

kust saame laine(frondi) liikumiskiiruseks

$$v' = \sqrt{\frac{B}{\varrho}}$$

Saadud valem, nagu muide kõik lainete ja võnkumistega seotud valemid, kehtib vaid **väikeste häirituste** korral. Valem on universaalne - käsiraamatutest võime leida terve paketi analoogilisi valemeid:

- Pikilaine vedelikus: $v = \sqrt{B/\varrho}$, B on ruumelastsustegur;
- Pikilaine tahkes aines: $v = \sqrt{E/\varrho}$, E on elastsusmoodul;
- Ristlaine tahkes aines: $v = \sqrt{G/\varrho}$, G on nihkemoodul;
- Pikilaine gaasis: $v = \sqrt{C/\varrho}$, C on gasodünaamiline rõhutegur.

Elastsuslaine (ka häälelaine) levimiskiiruse ruut on alati võrdeline keskkonna elastsusmooduliga ning pöördvõrdeline tihedusega.

Tavalises häälelaines (suhteliselt suured sagedused ja väike amplituud) saame C avaldada adiabaadi võrrandist

$PV^{\kappa} = C(onst)$:

$$C = -\frac{\Delta P}{\frac{\Delta V}{V}} \longrightarrow -V\frac{dP}{dV} = -VC(-\kappa V^{-\kappa-1}) = \kappa CV^{-\kappa} = \kappa P$$

Adiabaatilise laine kiiruseks ideaalses gaasis saame vastavalt olekuvõrrandile

$P = \frac{mRT}{V\mu}$, $\frac{m}{V} = \varrho$:

$$v = \sqrt{\frac{C}{\varrho}} = \sqrt{\frac{\kappa RT}{\mu}}.$$

Nägime, et elastsuslaine levimiskiirus aines sõltub ainult aine omadustest, mitte aga võnkumiste sagedusest. Seega pole ka lainepikkus mitte niivõrd lainet ennast kuivõrd laine ja keskkonna vastasmõju kirjeldav suurus.

Laineprotsessi kirjeldab sagedus; laine levikukiirus ja selle kaudu ka lainepikkus ning lainearv sõltuvad keskkonna omadustest.

Elastsuslainete levikukiirust antud aines nimetatakse *helikiiruseks*.

Näeme, et heli kiirus on võrdeline ruutjuurega elastsustegurist ning pöördvõrdeline ruutjuurega tihedusest. Mida raskem on aine, seda väiksem on heli kiirus. Tasub meeles pidada.

Elektromagnetlaine. Lainevõrrand võib välja ilmuda sootuks ootamatult. Kui minna 13. loengus saadud Maxwelli võrrandites üle sama tüüpi muutujatele E ja H, saame:

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

See siin on **vektoranalüüs**. Ärge kurvastage, kui midagi aru ei saa. Kui vaja, õpite ära - asi polegi nii keeruline.

Kui nüüd võtta esimesest võrrandist veel kord rootor, saame:

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\vec{E}) = -\mu\mu_0 \mathrm{rot}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\mu\mu_0 \frac{\partial(\mathrm{rot}\vec{H})}{\partial t}.$$

Asendades viimases liikmes $\mathrm{rot}\vec{H}$ teisest võrrandist,

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\vec{E}) = -\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2},$$

ning teades (matemaatika!),et $\mathrm{rotrot}\vec{E} = \mathrm{graddiv}\vec{\mathrm{E}} - \Delta\vec{\mathrm{E}}$ ja arvestades, et laengute puudumisel on $\mathrm{div}\vec{\mathrm{E}} = 0$, saame lõpuks

$$\Delta\vec{E} = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2},$$

mis on puhtakujuline lainevõrrand vektorvälja $\vec{E}$, seega elektrivälja jaoks.

Kui alustada *teisest võrrandist* ja teha sama manipulatsiooni esimese võrrandi abil, saame analoogilise lainevõrrandi *magnetvälja* jaoks:

$$\Delta\vec{H} = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}.$$

Need kaks võrrandit on paaris, nagu sukk ja saabas: ei saa me "elektrilainet" magnetvälja abita ega "magnetlainet" elektriväljata. Nii neid kokku nimetataksegi **elektromagnetlaine**, aga veel sagedamini **elektromagnetvälja** võrrandeiks.

Seega järeldub Maxwelli võrrandeist **matemaatiliselt** keskkonnas kiirusega $u = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu}}$ leviva laine olemasolu.

Küllap Maxwell alguses imestas, kui elektromagnetismi rehkendustest lainevõrrand välja tuli. Aga ega imestamiseks pikalt aega ei jäänud: lainete "eetrisse saatmine" avatud võnkeringist oli niivõrd lihtne eksperiment, et Hertz'i sädeinduktorit ja Popovi "äikesemärkijat" ei tulnud kaua oodata.

Elektromagnetlainete teooria on aluseks nii sidetehnikale kui valguse laineteooriale.

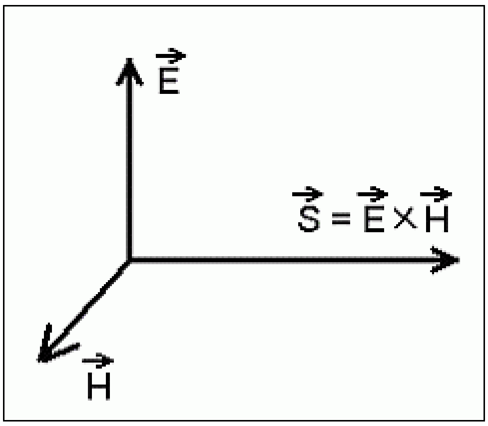
Elektromagnetlaine kujutab endast harmoonilise võnkumise seaduse järgi muutuvat elektri- ja magnetvälja kombinatsiooni, kus võnked toimuvad **samas faasis** (võrrandeis märgid samad).

Poynting'i vektor. Meie pilt kipub vägisi keeruliseks minema: kaks ajas harmooniliselt muutuvat ning samal ajal lainena ruumis levivat vektorvälja, mida omavahel seob keeruline teist järku diferentsiaalvõrrandite süsteem.

Vaja oleks lihtsat pilti, mis hästi meelde jääb ning lainete põhivahekordi piisavalt täpselt kirjeldab.

Tuleb välja, et kõike seda saab teha, **defineerides elektromagnetlaine energiavoo tiheduse** valemiga:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$



Poyntingi vektorkolmik.

- Sellest, et vektorid on samas faasis, järeldub korrutis.
- Sellest, et risti - vektorkorrutis.
- Märgid Maxwelli võrrandite ajatuletiste ees määravad kolmiku orientatsiooni levikusuuna suhtes.

Kõik ühe valemiga. See ongi Poynting'i vektor.

Energiatihedus ise võrdub elektri- ja magnetvälja energiatiheduste summaga:

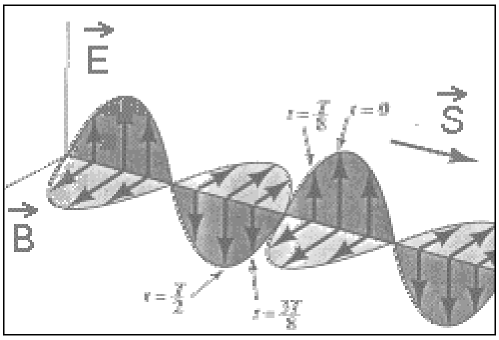
$$w = w_E + w_H = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}$$

Kui soovime leida energiavoogu läbi mingi pinna, kasutame ülalpool leitud energiavoo pindintegraali:

$$\Phi = \int_\Sigma \vec{S} d\vec{\Sigma} = \int_\Sigma (\vec{E} \times \vec{H}) d\vec{\Sigma},$$

kus $\vec{\Sigma}$ tähistab **pindala**, mida läbivat energiavoogu me arvutame.

Küsimus: Miks tähistasime siin pindala Σ, mitte S-ga?



Elektromagnetlaine tavakujutus:
laine levikusuunaga ristsihis võnkuvad elektri- ja magnetvälja vektorid. Pange tähele: võnkumised on samas faasis ja teineteisega risti.

Doppleri efekt. Kogu senine matemaatika eeldab nii laineallika, vastuvõtja kui keskkonna paigalseisu. Tegelikkuses võivad kõik omavahel liikuda, mis mõjutab nii lainete kui neid kirjeldavate valemite kuju ja omadusi.

Lainete sageduse muutumist laineallika liikumisel nimetatakse Doppleri efektiks.

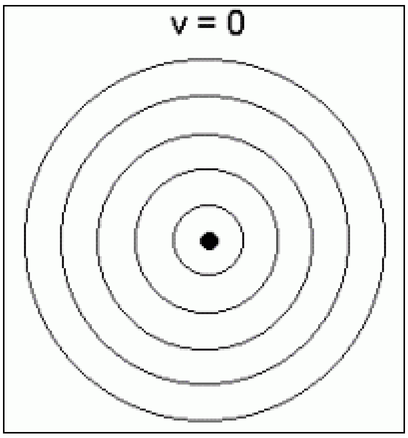
Häälelainete kohta on teada, et läheneva allika (näiteks auto) poolt tekitatav heli (mootorimürin) tundub toonilt kõrgem, kui kaugeneva oma. Eriti selgelt on tooni muutus kuuldav auto möödumisel. Et heli kõrgus peegeldab võngete sagedust, peab viimane sõltuma allika liikumisest vastuvõtja suhtes.

Oletame, et laineallikas (võnkuv keha, ostsillaator) läheneb meile kiirusega u. Sel juhul on lainevõrrandis

$$l = a \sin(\omega t - kx)$$

olev suurus x (allika kaugus) sõltuv ajast. Ühtlase liikumise korral $x = x_0 - ut$ ja lainevõrrandi faasiosa

$$\omega t - kx = \omega t - k(x_0 - ut) = (\omega + ku)t - kx_0 = \omega' t - kx_0,$$



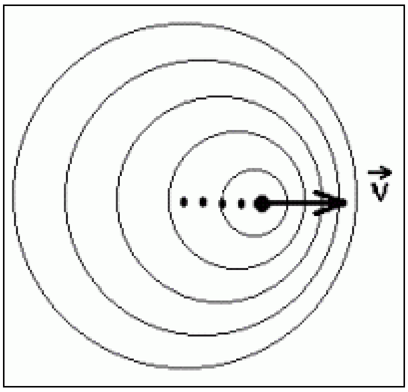
Paigalseis: ringlained punktallika ümber.

kus

$$\omega' = \omega + ku = \omega + \frac{\omega}{v}u = \omega(1 + \frac{u}{v})$$

on uus, esialgsest suurem sagedus, mis sobib hästi praktikast tuntud "kõrgema tooniga".

Toodud näites liikus allikas vastvõtja poole. Matemaatiliselt annaks sama tulemuse ka vastuvõtja liikumine laineallika poole, st. lainele vastu. Juhul, kui laineallikas eemaldub vaatlejast, tuleb valemis märk vastupidine - sagedus väheneb.



Doppleri efekt - ringlained liikuva punktallika korral.

Saadud valemi tuletas Christian Doppler 1842. a., mille auks nähtust

> **laine sageduse muutust allika-vastuvõtja omavahelise liikumise tõttu - nimetataksegi *Doppleri efektiks*.**

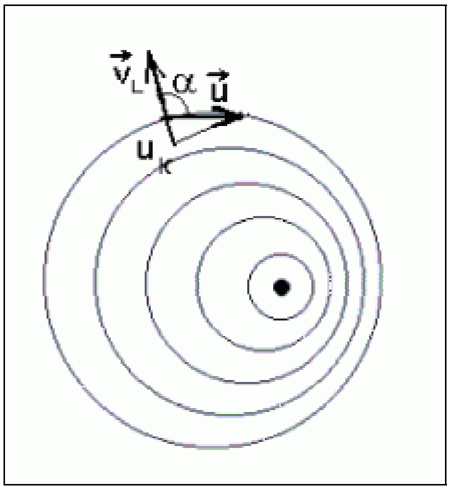
Valem töötab ka vektorkujul, st kui allikas liigub laine levimissuunaga suvalise nurga all. Faasiliikme ruumiline (vektor)komponent tuleb siis:

$$\vec{k}\vec{r} = \vec{k}(\vec{r_0} - \vec{u}t) = \vec{k}\vec{r_0} - \vec{k}\vec{u}t,$$

millest lähtudes saame uue sageduse

$$\omega' = \omega + ku\cos\alpha = \omega(1 + \frac{u_k}{v}),$$

kus α on nurk liikumissuuna ja laine levikusuuna vahel ning $u_k = u\cos k$ kiirusvektori $\vec{u}$ projektsioon laine levimissuunale.



Nii kujuneb nurk lainevektori ja liikumissuuna vahel.

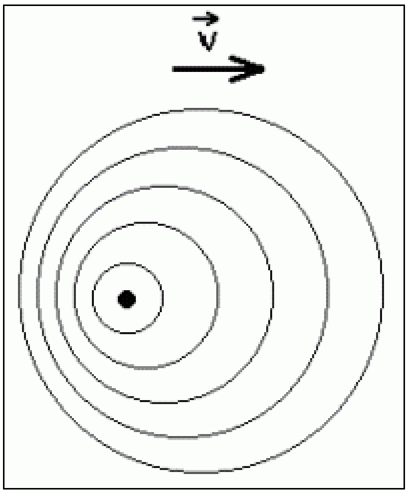
Valemi selline kirjutusviis kontrollib ka parandi märki:

- läheneva allika korral ($\frac{-\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$) on $\cos\alpha$ positiivne (sagedus suureneb),
- kaugeneva allika korral ($\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$) on $\cos\alpha$ negatiivne (sagedus väheneb).

Mis juhtub, kui liigub vastuvõtja? Loogiline oleks kasutada sama valemit, muutes parandusliikme märki. Tegelikult seda ei tehta: lainete sagedust on oluline teada *mitte kiirgaja, vaid vastuvõtja seisukohalt*. Seepärast loetakse lainevõrrandit tavaliselt **vastuvõtjaga seotud taustsüsteemis**.

Kui mingil põhjusel on vaja teistsugust lähenemist, tuleb valemid viia probleemiga vastavusse. Seda saab teha tavalise koordinaatteisendusega (Galilei teisendus).

Kas liikumine keskkonna suhtes siis Doppleri efekti ei mõjuta? Oleme harjunud laineid kirjeldama *lainepikkuse* abil ja see sõltub tõepoolest keskkonna liikumisest. Joonisel on kujutatud voolava vee pinnal levivate lainete kuju - laineid tekitab veevoolu suhtes paigal seisev allikas.



Ringlained voolava vee pinnal.

Lainepikkused on küll erinevad, aga voolu suunas liitub voolu kiirus laine kiirusele, mistõttu paigalseisva vastuvõtja jaoks jääb võnkesagedus samaks.

Aga vastuvoolu?

Näeme, et kui enne olid laineharjad ringikujulised, siis nüüd sõltub lainepikkus vee liikumisest, olles suurem seal, kus laine ja vesi liiguvad ühes suunas ning lühem vastassuunas. Et veeosakeste võnkesagedus on mõlemal juhul sama, on lainepikkus pildi vasakus servas väiksem, paremas servas aga suurem.

Muidugi mõjutab keskkonna liikumine ka laine levimise *kiirust*. Joonisel näeme, et pärivoolu saadetud signaal jõuab adressaadini kiiremini, kui vastuvoolu sama kaugel oleva vastuvõtja poole saadetu.

Ja veel üks oluline asi: lainefrondi kõverus, mis määrab (kera)laine amplituudi, on allavoolu samadel kaugustel regulaarselt väiksem kui vastuvoolu. Seega nõrgeneb vastuvoolu leviv laine kiiremini ja allatuult karjuda tasub küll.

Superpositsiooniprintsiip. Samas keskkonnas võib asuda ja võnkumisi tekitada ükskõik kui palju laineallikaid. Kõik need võnked levivad keskkonda üheaegselt, mistõttu üks ja seesama osake võtab osa paljudest võnkumistest. Klassikalise füüsika seisukohalt on need võnkumised **sõltumatud**, mistõttu ka kõik lained levivad keskkonnas nii, nagu poleks teisi laineid olemas.

Seda eeldust, mis makrofüüsikas on katseandmetega heas kooskõlas, nimetatakse superpositsiooniprintsiibiks. Printsiip lubab laineid liita, lähtudes üksiklainete parameetreist. Kvantteoorias, kus lainel on ka osakese omadused, tuleb lainete liitmisel arvestada ka osakeste statistikalisi parameetreid (kvantarve), mistõttu superpositsiooniprintsiip ei kehti.

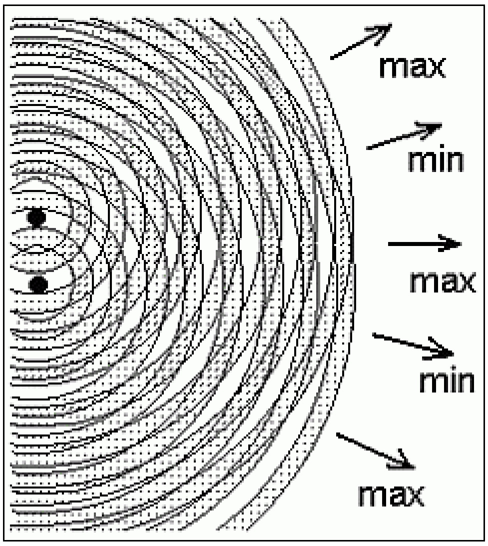
Lainete sõltumatusest järeldub superpositsiooniprintsiip:

et leida paljude lainete taktis võnkuva osakese liikumist, tuleb liita kõigi lainete poolt esile kutsutud võnkumised.

Matemaatiliselt eeldab superpositsiooniprintsiip nagu kogu lainevõrrandki võngete väikest amplituuti lainepikkusega võrreldes. Kui võngete ulatus läheb suureks, pole lained enam sõltumatud. Aga siis ei kehti ka teised elastsuslaine valemid.

Huvitaval kombel on *matemaatiline lainevõrrand*, kord juba (tegelikkuse lähendina, kuna sisaldab vaid Maclaurin'i rea kaht esimest liiget) kirja pandud, immuunne kogu "klassikalise" füüsika aksiomaatika suhtes.

Lainete liitmine. Alustame jällegi lihtsaimast juhtumist, kus liituvate lainete sagedused on võrdsed. Et lained levivad ühes ja samas keskkonnas, on sama ka levimiskiirus ning seega ka lainearv. Erinevaiks jäävad **amplituudid** ja loomulikult **kaugused laineallikast**.



Ringlainete liitumine.
Suundades, kus kohtuvad laineharjad, on võnkumise amplituud maksimaalne.

Liitlaine võrrandi saame, kui liidame keskkonna mingi punkti hälbed tasakaaluasendist (l_1, l_2) mingil ajahetkel t.

$$l = l_1 + l_2 = a_1 \sin(\omega t + \vec{k}\vec{r_1}) + a_2 \sin(\omega t + \vec{k}\vec{r_2}).$$

Suurusi $\vec{k}\vec{r}$ vaatleme kui algfaase ning kasutades liitvõnkumiste *amplituudide reeglit*, saame vastuvõtja poolt registreeritavaks võnkeamplituudiks

$$a = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\vec{k}\vec{r_1} - \vec{k}\vec{r_2}).$$

Kui tegemist on punktallikate poolt tekitatavate **keralainetega**, saab valemis olevale faasitegurile saab anda lihtsama kuju. Sel juhul langeb lainevektori $\vec{k}$ siht ühte kohavektorite $\vec{r_1}$, $\vec{r_2}$ suundadega ning skalaarkorrutised saab asendada lihtkorrutistega:

$$\Delta\varphi = kr_1 - kr_2 = k(r_1 - r_2) = \frac{\omega}{v}\Delta r.$$

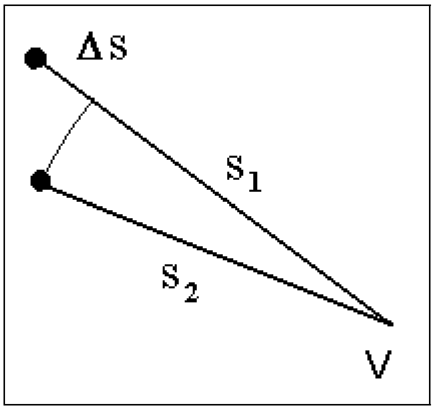
Interferentsivalemid. Siit on juba lihtne saada tingimused maksimumide ja miinimumide jaoks:

Maksimum:

$$\Delta\varphi = n \cdot 2\pi \quad \rightarrow \quad \Delta r = \frac{n \cdot 2\pi v}{\omega} = n \cdot Tv = n\lambda.$$

Miinimum:

$$\Delta\varphi = (2n+1) \cdot \pi \quad \rightarrow \quad \Delta r = \frac{(2n+1) \cdot \pi v}{\omega} = (2n+1)\frac{\lambda}{2}.$$



Käiguvahe.

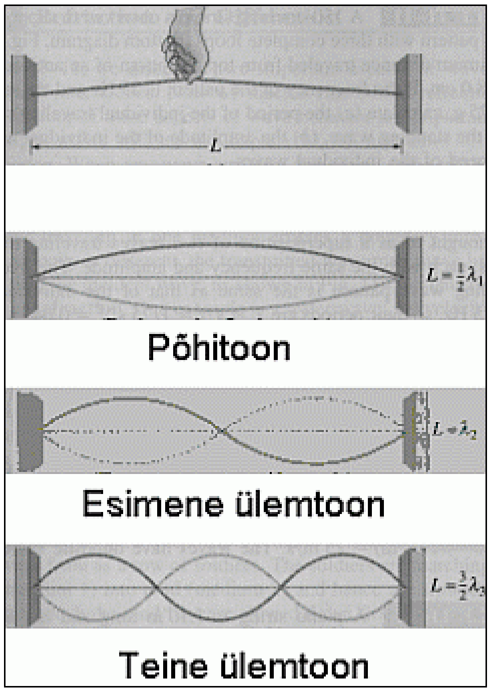
Neid reegleid tuntakse **interferentsivalemite** nime all. Suurust, mille võrra erinevad samasse punkti saabuvate lainete poolt läbitud teepikkused, nimetatakse lainete **käiguvaheks** .

Nagu võnkumistegi korral, vastab maksimumile laine, mille amplituud on võrdne liidetavate lainete amplituudide summaga, miinimumile aga amplituudide vahe. Ülejäänud punktides on laine amplituud nende kahe äärmuse vahel.

Sama kiirusega levivate lainete liitumisel tekkivat võnkumiste ruumjaotust nimetatakse **seisevlaineks.**

Tekkivat laineamplituudide ruumjaotust nimetatakse **interferentsipildiks**, täpsem väljend oleks küll "amplituudide väli".

Huvitav on seejuures asjaolu, et välja pilt näib olevat **ajas muutumatu - statsionaarne**. Üksiku laine korral näeme visuaalselt laine *liikumist*, võnkumine aga "jääb varju"; liitlaine korral on vastupidi - me ei märkagi laineharjade liikumist, selle asemel näeme *erineva amplituudiga võnkuvate kehade hulka*.



Seisevlaine näide: võnkuv pillikeel.

Visake üheaegselt vette kaks kivi. Algul näete levivaid ringlaineid, mõne aja pärast need kohtuvad. Jälgige kohtumispiirkonda: seal muutub veepind "muhklikuks" ning liikumise illusioon kaob.

Interferentspilti nimetatakse sageli ka **seisevlaineks**. Õpikutest võib jääda mulje, nagu tekiks seisevlaine vaid vastassuunas levivate lainete liitumisel . See pole päris õige. Mõeldud on seal *ühemõõtmelist* juhtu (piki pillikeelt või orelivilet kulgevad lained) - siis on tõesti ainus võimalik interferents seotud vastassuunas levivate lainetega.

Lainepakett, soliton, rühmakiirus. Liikuma hakkab interferentsipilt juhul, kui liituvate lainete sagedused on erinevad. Nüüd on lugu nii, et amplituudivalemis lisandub faasitegurisse ka *ajast sõltuv liige*, mis sarnaneb liitvõnkumistest tuntud *tuiklemise valemiga*. Faasitegurisse lisandub liige $\cos\frac{\Delta\omega}{2}t$, millele vastavalt laineformalismile tuleks lisada $-\vec{k}\vec{r}$.

Kui lained levivad samas suunas, asendab tuiklemistest tuntud perioodilist maksimumi **ruumis laine levimiskiirusega liikuv lainepakett** - jada suurema amplituudiga võnkumisi.

Eri sagedustega ning erineva kiirusega levivate lainete liitumisel võib kujuneda lainepakett, mille liikumiskiirus ei tarvitse kokku langeda faasikiirusega.

Juhul, kui lained ei levi samas suunas, muutub pildi matemaatiline kirjeldamine keeruliseks. Sõltuvalt lähtetingimustest võib lainepakett seista paigal, liikuda koos ühe või teise lainega või koguni mingis kolmandas suunas. Sellist hulkuvat lainet nimetatakse **solitoniks** ja tema kohta on kirjutatud üsna palju raamatuid.

Lainete liitumisega seotud probleeme käsitleme pikemalt laineoptika loengus.

Üheks lihtsamaks(?) juhtumiks on, kui lainete levimiskiirus sõltub nende sagedusest. Seda juhtub keskkondades, mis koosnevad omavõnkesagedusi omavatest osakestest - nn **ostsillaatoritest**.

Sellisel juhul kulgeb soliton laine levimiskiirusest (faasikiirusest) erineva kiirusega, mida nimetatakse **rühmakiiruseks**.