Loeng 7. Vedelike voolamine.

Vedelike (gaaside) mehaanika. Siiani rõhutasime kõikjal kehade jäikust - jõudude mõjul need hakkasid kas liikuma või pöörlema, aga tegid seda tervikuna. Kogemusest teame aga, et looduses on hulgaliselt kehi, mis pole tervikuna nihutatavad (kui nad just tahkest ainest anumasse pole suletud). Nende kehade - vedelike ja gaaside - liikumist saab samuti arvutada.

Mehaanikas eristatakse aine kolme olekut järgnevalt:

A. **Tahke keha** säilitab liikumisel oma kuju ja ruumala;
B. **Vedelik** säilitab liikumisel oma (kogu)ruumala, kuid ei säilita kuju;
C. **Gaas** ei säilita ei kuju ega ruumala, vaid täidab kogu olemasoleva ruumi.

Vedelikke ja gaase eristab tahketest kehadest see, et neil puudub kindel kuju. Iga vedeliku või gaasi osake liigub iseseisvalt, teda võib vaadelda kui masspunkti (või ruumielementi). Kui räägitakse vedeliku liikumisest (näiteks voolamisel), mõeldakse selle all vedelikuosakeste liikumist.

Kui suur peaks see osake olema? Newtoni mehaanika, mis kasutab **pidevaid funktsioone**, nõuab, et võrrandid kehtiksid "kuitahes väikeste osakeste korral". Klassikalise füüsika seisukohalt peab vedelik olema pidev keskkond - ainult siis saame rakendada diferentsiaalarvutust. Nii valime oma joonistel "ruumielemendi" piisavalt suure (et joonis loetav oleks) ja vajaduse korral vähendame seda kuni "lõpmata väikese suuruseni".

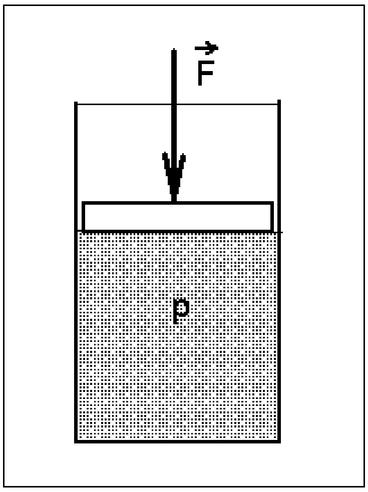
NB! Need lõpmata väikesed osakesed **ei ole molekulid**! Molekulid, millel on kindel mass ja mõõtmed ja mis liiguvad kaootiliselt ning väga suurte kiirustega, tulevad mängu gaaside kirjeldamisel. Klassikalise hüdrodünaamika vedelik on pidev, tema osake võib (põhimõtteliselt!) olla kuitahes väike.

Mehaanika käsitleb vedelikku pideva keskkonnana.

Et leida vedeliku liikumise võrrandit, peame oskama matemaatiliselt kirja panna vedelikuosakestele mõjuvaid jõude.

Kuna osakesi mõjutavad kõige sagedamini teised (naaber-) osakesed, on vaja suurust, mis iseloomustaks neid jõudusid. Et me oskame mõõta-arvutada tahketele kehadele mõjuvaid jõude, kasutamegi vedelike uurimisel nende kontakti tahkete kehadega.

Kõige tavalisemaks uurimisvahendiks on silindriline anum, milles liigub tihedalt kolb. Kui sellele kolvile mõjuda jõuga, kandub see jõud üle kolvi all anumas olevale vedelikule ning meil on täielik alus oletada, et jõud vedeliku sees on samaväärsed vedeliku ja kolvi vaheliste jõududega.



Vedelik kolvi all

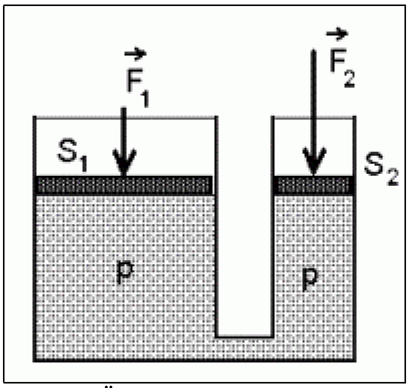
Katse näitab, et oluline pole mitte kolvile mõjuv jõud, vaid selle jagatis kolvi pindalaga. Kui meil on kaks ühendatud silindrit, mille läbimõõdud on erinevad, peab tasakaalu saavutamiseks suurema läbimõõduga silindris liikuvale kolvile mõjuma suurema jõuga.

Täpne mõõtmine näitab, et

see jõud on **pöördvõrdeline kolvi pindalaga**, ei sõltu silindri kujust ega asendist.

Et tegu on vedeliku omadusega, taipas esimesena prantsuse looduseuurija, rohkem filosoofina tuntud **Blaise Pascal**, tema nime järgi on nimetatud nii vastav seadus kui ka rõhu ühik.

***Rõhk* on vaadeldavale kehale mõjuv rõhumisjõud pinnaühiku kohta**



Ühendatud silindrid

Pascal'i seadus:

Vedelikud ja gaasid annavad rõhku edasi kõigis suundades ühteviisi.

Kaks lihtsat ja lühikest lauset, kerge pähe õppida kuid raske mõista. Esiteks, kui rõhk ei sõltu suunast, siis peab ta olema skaalar. Et jõud on vektor, peab definitsioonist tulenevas valemis

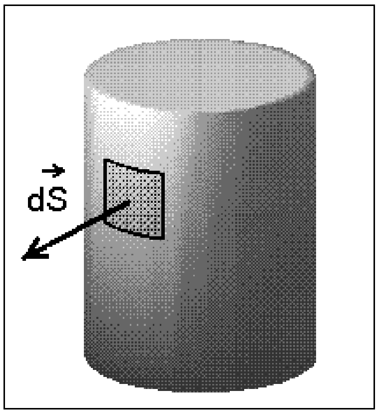
$$p = \frac{F}{S}$$

olema lisaks jõule veel üks vektoriaalne suurus. See võib olla vaid pindala - sel juhul oleks võimalik kirjutada näiteks $\vec{F} = p\vec{S}$.

Rõhu ühikuks SI süsteemis on **paskal**, (P) mis vastab rõhumisjõule üks njuuton ruutmeetri kohta.

Niisiis peab füüsikas pindala olema suunatud suurus - vektor. Aga seda ta ju ongi - igal pinnatükil on **kindel ruumiline orientatsioon**, mida väljendab temale tõmmatud **ristsirge e. normaal**.

Pindala vektoriks loemegi vektorit, mille moodul võrdub pinnatüki pindalaga, suund aga ühtib selle pinna normaaliga.



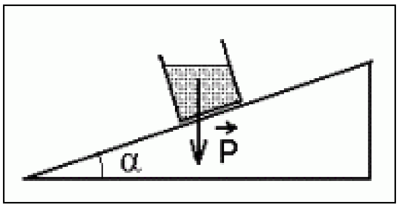
Pinnatükk **dS** vektorina

Millisesse suunda kahest võimalikust on vektor suunatud, on meie endi otsustada. See suund on kokkuleppeline, nagu pöörleva liikumise aksiaalvektoreilgi. Kui jutt on anumasse suletud gaasi rõhust, võetakse pinna vektori suund väljapoole. Et rõhumisjõu suund on samuti anumast väljapoole, peab rõhk olema alati positiivne suurus (rõhkude vahe muidugi mitte!).

Kui rääkida rõhust vedeliku sees, tuleb meil kujutleda mingit vedelikuosakest ja sellele mõjuvaid jõude. Tasakaalu korral vedelik seisab paigal, vedelikuosakesed on järelikult liikumatud ja neile mõjuvate jõudude resultant null. See on võimalik vaid siis, kui rõhk on sõltumatu suunast - veel üks tõestus Pascali seadusele.

Rõhk raskusjõu väljas. Vedeliku omapäraks gaasidega võrreldes on pinna olemasolu. Meile harjumuspärane horisontaalne tasane pind kujuneb raskusjõu mõjul - vedeliku osakesed võtavad sellise asendi, kus neile mõjuvad jõud on tasakaalus.

Kui veepind ei oleks horisontaalne, tekiks pinnal asuvatel osakestel "kaldpinna efekt" - raskusjõu pinnaga paralleelse komponendi mõjul hakkaks osakesed alla libisema; see liikumine kestaks seni, kuni pind võtab horisontaalse asendi nii, et raskusjõud on pinnaga risti.

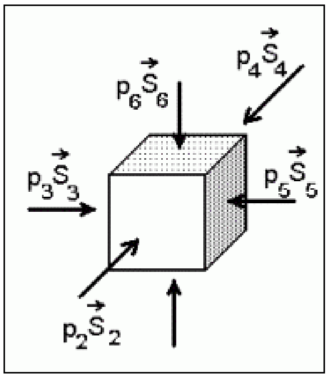


Vedelik kaldpinnal

Raskusjõud mõjub ka vedeliku sees. Seetõttu lisandub iga vedelikuosakese jaoks lisaks naaberosakeste rõhule ka osakese enda kaal. Koos sellega muutub tasakaaluvõrrand.

Näiteks kuubikujulise ruumiosa jaoks (vt. joon.) kirjutame tasakaaluvõrrandi

$$p_1\vec{S}_1 + p_2\vec{S}_2 + p_3\vec{S}_3 + p_4\vec{S}_4 + p_5\vec{S}_5 + p_6\vec{S}_6 + \vec{P} = 0.$$



Rõhutasakaal: Et kuup paigal seisaks, peavad tema tahkudele mõjuvad jõud olema võrdsed

Et külgtahkudele mõjuvad jõud on võrdsed-vastassuunalised, saame $p_2\vec{S}_2 = -p_4\vec{S}_4$ ning $p_3\vec{S}_3 = -p_5\vec{S}_5$.
Võrrandisse jääb kolm liiget:

$$p_1\vec{S}_1 + p_6\vec{S}_6 = -\vec{P} = -m\vec{g} = -\varrho V\vec{g},$$

kus ϱ on vedeliku tihedus ja $V = hS$ kuubi ruumala.

Et kõik need vektorid on samasihilised, võime kirjutada skalaarse võrrandi, võttes märgid vastavalt vektorite suunale:

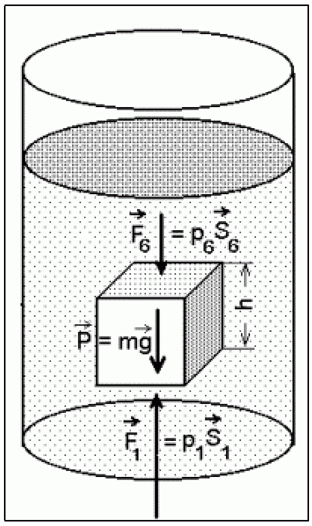
$$p_1S_1 - p_6S_6 = -\varrho h(S_1 = S_6)g \quad \Rightarrow \quad p_6 - p_1 = \varrho gh.$$

Siin h on kuubi kõrgus.

Kui kuubi ülaserv asub vedeliku pinnal, on $p_1 = 0$ ning valem saab lihtsa kuju:

$$p(h) = \varrho gh,$$

kus h tähistab sügavust - kaugust vedeliku pinnani.



Tasakaal raskusjõuga: Kuubi kaalu **P** peab tasakaalustama üleslükkejõud.

Näiteks saame vee rõhuks 100 m sügavusel $p = 1000\ kgm^{-3} \cdot 9.8\ ms^{-2} \cdot 100\ m = 980\,000\ Pa$.

NB! Pöörame tähelepanu ühele olulisele momendile vedelike mehaanikas:
vedelikuhulga mass avaldatakse tiheduse kaudu.

Kui tahketel kehadel oli alati kindel kuju ja seega ka kindel mass, siis sõnaühend "vedeliku mass" ei oma mingit mõtet - me võime rääkida vaid kindla vedelikuhulga massist.

Aga vedeliku hulka on iidsetest aegadest saadik mõõdetud ruumalaühikute (kortel, toop, liiter) abil.

Kui meil on vaja teada mitte ruumala, vaid massi, peame liitrites mõõdetud vedelikuhulga korrutama ühe liitri vedeliku massiga - seega vedeliku tihedusega.

See lihtne tehe sisaldab aga varjatud eeldust, et **vedeliku tihedus on kõikjal ja alati ühesugune**.

Kõigis veekogudes - ka veevärgi torudes - kasvab rõhk sügavuse h kasvades 9800 paskalit iga meetri kohta

Tegelikkuses on vedelikud nagu tahked kehadki kokkusurutavad (tihedus sõltub rõhust), ka esineb vedelikel soojuspaisumine (tihedus sõltub temperatuurist). Õnneks on need muutused väga väikesed ja seepärast võib klassikaline hüdrodünaamika neid mitte arvestada.

Et asi täpne oleks, räägitakse sel juhul **ideaalsest vedelikust**, mille tihedus on alati ühesugune, mis ei lähe kunagi keema ja mis voolab ilma takistusteta.

Ideaalne vedelik ei muuda oma tihedust ja voolab takistuseta.

Rõhutasakaalu valemist raskusjõu väljas järeldub üks hüdrostaatika tuntuimaid valemeid - **Archimedese seadus**.

Kujutame ette, et veekuubi asemel on meil samade mõõtmetega keha tihedusega ϱ_1 ja järelikult massiga $m_1 = \varrho_1 V$.

Nüüd pole see kuup enam tasakaalus: talle mõjub rõhkude vahest tingitud üleslükkejõud

$$F_ü = p_6 S - p_1 S = \varrho g S h = \varrho g V$$

ning keha kaal

$$P = \varrho_1 g V.$$

Keha kaaluks vees saame $P' = P - F_ü < P$.

Archimedese sõnastuses:

> **Vedelikku asetatud kehad kaotavad oma kaalust osa, mis on võrdne keha poolt välja tõrjutud vedeliku kaaluga.**

Tõepoolest: kui $\varrho_1 g V$ oli keha kaal, siis $F_ü = \varrho g V$ on keha ruumalale vastava vedelikuhulga kaal, mida võib ju nimetada ka välja tõrjutud vedeliku kaaluks.

Küsimus: Millistel tingimustel kehad ujuvad? Kui suur osa nendest asub vee all?

Tahked kehad on vedelikus seda kergemad, mida suurem on nende ruumala

Voolav vedelik. Kui rõhutasakaal mingil põhjusel puudub, hakkavad vedelikuosakesed liikuma. Osakesele mõjuv jõud tähendab, et $p \neq$ const. Sel juhul räägime **rõhuväljast**, mis on skalaarne väli; sellisesse väljas sattunud osakestele mõjub jõud ja nad hakkavad liikuma. Vedeliku liikumist nim. voolamiseks ja seda uurib hüdrodünaamika.

Kui hüdrostaatika valemite tuletamisel lähtusime eeldusest, et tihedus on konstantne (ei sõltu rõhust), siis nüüd peame tegema veel ühe lihtsustava eelduse. Selleks on takistuseta voolavus e. sisehõõrdejõudude puudumine. Mis jõud need on ja millest sõltuvad, sellest edaspidi.

Takistuseta voolavat mittekokkusurutavat vedelikku nim. **ideaalseks vedelikuks** ning tema abil tuletatakse hüdrodünaamika põhivalemid. Üleminek reaalsetele vedelikele tehakse hiljem vastavate parandusliikmete sisseviimisega.

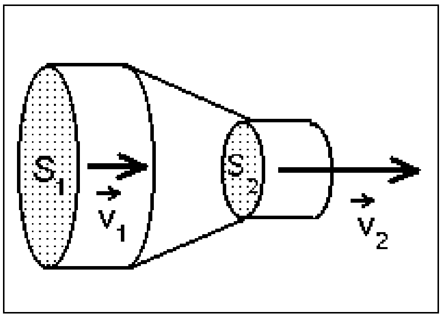
Kujutame lihtsuse mõttes torus voolavat vedelikku. Voolamiskiirust saame määrata kahel viisil:

- märgistades mõne vedelikuosakese ning mõõtes selle kiirust nagu tahkete kehade korral;
- mõõtes torust välja voolava vedeliku hulka.

Reaalse vedeliku korral on osakeste kiirused torus erinevad ning seetõttu kõlbab voolukiiruseks vaid teine variant. Ideaalse vedeliku korral on kiirused võrdsed ning kirjeldused ekvivalentsed. Nii saame toru aja Δt jooksul mistahes ristlõiget läbivaks veehulgaks $\Delta V = Sv\Delta t$; kiiruseks **ajaühikus toru ristlõiget läbinud vedeliku hulga järgi** on seega suhe

$$v = \frac{\Delta V}{S\Delta t}.$$

Hüdrodünaamika põhivõrranditeks on **pidevuse teoreem** ja **Bernoulli võrrand**. Mõlemad kujutavad endast mehaanika jäävusseaduste formuleeringuid hüdrodünaamika jaoks. Lihtsuse mõttes alustame ühemõõtmelisest voolamisest - voolamisest torus.



Pidevuse teoreem: mida peenem toru, seda suurem voolamiskiirus.

Pidevuse teoreem:

Vedeliku voolamisel muutuva ristlõikega torus on voolamise kiirus pöördvõrdeline toru ristlõike pindalaga.

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{S_2}{S_1} \quad \text{ehk} \quad v_1 S_1 = v_2 S_2 \quad \text{ehk} \quad vS = \text{const.}$$

Tõestada pole siin midagi: kuna vedelik torust välja ei pääse ning ka kokku ei anna teda suruda, peab suvalist ristlõiget sama ajavahemiku vältel läbima võrdne vedelikuhulk. Võrdsustades ΔV väärtused eri ristlõigetes, saame otsitava valemi.

Seega kujutab pidevuse teoreem endast tegelikult aine jäävuse seadust.

Bernoulli võrrand:

$$p + \varrho g h + \frac{\varrho v^2}{2} = \text{const.}$$

See on energia jäävuse seadus. Vaatame joonisel kujutatud kaldu asetsevat muutuva ristlõikega toru. Valime kaks ristlõiget: ühe kõrgusel h_1 ja pindalaga S_1, teise kõrgusel h_2 ristlõikega S_2 ning arvutame vedeliku voolamisel läbi sellise toru ajavahemikul Δt tehtava töö:

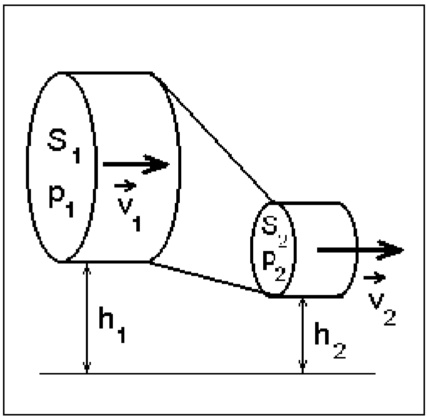
$$A = A_1 + A_2 = -p_1 S_1 v_1 \Delta t + p_2 S_2 v_2 \Delta t$$

(esimene liige on võetud negatiivne, kuna siin on ristlõikepinna vektori $\vec{S}_1$ suund vastupidine kiirusvektori $\vec{v}_1$suunaga).

Energia jäävuse seaduse kohaselt peab see olema võrdne mehaanilise koguenergia muuduga

$$\Delta E = T_1 + U_1 - T_2 - U_2 = mgh_1 + \frac{mv_1^2}{2} - mgh_2 - \frac{mv_2^2}{2}.$$

Asendades massi tiheduse ja ruumala kaudu $m = \varrho V = \varrho S_i v_i \Delta t$, rakendades pidevuse teoreemi $S_1 v_1 = S_2 v_2$ ning koondades sarnased liikmed, saamegi ülaltoodud võrduse.



Bernoulli võrrand: rõhk ***p*** sõltub nii voolamiskiirusest kui toruosa kõrgusest .

Järeldused Bernoulli võrrandist:

- Horisontaalses torus on voolava vedeliku rõhk seda väiksem, mida suurem on voolamise kiirus.

Tõepoolest, kui $h_1 = h_2$, saame $p + \frac{\varrho v^2}{2} =$ **const**. Seega peab kiiruse suurenemisel esimene liidetav vähenema.

- Reservuaarist välja voolava vee kiirus on niisama suur, kui on lõppkiirus veetaseme ja väljavooluava kõrguste vahele vastavalt kõrguselt kukkumisel.

Lähtume sellest, et rõhk nii reservuaari pinnal kui ava kõrgusel on sama.

Järelejäänud valemist

$$\varrho g h_1 + \frac{\varrho v_1^2}{2} = \varrho g h_2 + \frac{\varrho v_2^2}{2}$$

kaob veel liige kus $v_1 = 0$. Kui ϱ-ga läbi jagada, jääb

$$v_2 = \sqrt{2g(h_1 - h_2)}$$

sama kiirus, mille saavutaks vabalt langev keha kõrguste vahe

$h_1 - h_2$ korral.

Ka rõhu valem raskusjõu väljas on tuletatav Bernoulli võrrandist juhul, kus vedelik seisab ($v_1 = v_2 = 0$).

Lisatekst: Pideva keskkonna hüdrodünaamika

Tuletatud valemeid on võimalik kirja panna ka "torude" abita. Selleks vaatame vedelikku ruumi täitva pideva keskkonnana, kus iga ruumipunkti jaoks saab määrata rõhu, vedeliku tiheduse ja voolamiskiiruse. Kaks esimest on teadupärast skalaarsed suurused, kolmas aga vektor. Nii et matemaatika seisukohalt on meil tegemist kahe skalaarse ja ühe vektorväljaga, mille uurimiseks kasutame matemaatikast tuntud **vektoranalüüsi** meetodeid.

Pideva keskkonna kirjeldamisel kasutab hüdrodünaamika vektoranalüüsi meetodeid.

Pidevuse teoreemi analoogi leidmiseks eraldame ruumis kinnise pinnaga S piiratud ruumiosa V. Läbi pinnaelemendi ajaühikus välja voolava vedeliku hulgaks saame

$$\varrho \vec{v} d\vec{S}$$

ning kogu ruumiosast V väljuva voo integraalina

$$\oint_S \varrho \vec{v} d\vec{S}$$

.

Et vaadeldavas ruumiosas olev vedelikuhulk

$$m = \int_V \varrho dV$$

selle tõttu väheneb, saame aine jäävuse seaduse kujul

$$-\frac{d}{dt} \int_V \varrho dV = \oint_S \varrho \vec{v} d\vec{S}.$$

Kui nüüd lasta "vedelikuosakesel" muutuda lõpmata väikeseks, st. tema ruumala $V \to 0$, jääb vasaku poole integraalist alles vaid integreeritav avaldis ϱ; kokku näitab vasak pool tiheduse muutumise kiirust $-d\varrho/dt$. Ka parem pool läheneb nullile, aga kuidas, seda me ei tea. Kui teisendada võrrandi paremat poolt Gaussi-Ostrogradski teoreemi abil:

$$\oint_S \varrho \vec{v} d\vec{S} = \int_V \mathrm{div}(\varrho \vec{v}) \mathrm{dV},$$

saame viia mõlemad liikmed ühele poole võrdusmärki:

$$\int_V \left(\frac{d\varrho}{dt} + \mathrm{div} \varrho \vec{v}\right) \mathrm{dV} = 0.$$

Et integraal on üle suvalise ruumala, järeldub siit integrandi võrdsus nulliga. Üldjuhul, kus muutuda võib ka tihedus, võime teise liikme lahti kirjutada korrutise diferentseerimise reegli kohaselt:

$$\frac{d\varrho}{dt} + \varrho \mathrm{div} \vec{v} + \vec{v} \mathrm{grad} \varrho = 0,$$

mis ongi **hüdrodünaamika pidevuse võrrand**.

Vedeliku voolamise kirjeldamiseks paneme kirja Newtoni II seaduse pideva keskkonna tarbeks:

$$\vec{F} = \vec{a}m = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}m\vec{v}. \quad \Longrightarrow \quad \oint_S pd\vec{S} = \frac{d}{dt}\left(\int_V \varrho dV\right) \cdot \vec{v}.$$

Jällegi on meil ühel pool võrdusmärki pind-, teisel pool tavaline kolmekordne (ruum)integraal. Gauss-Ostrogradski teoreem kehtib ka siin kujul

$$\oint_S pd\vec{S} = \int_V \nabla p dV \equiv \int_V \mathrm{grad} p dV.$$

Korrates pidevuse võrrandi tuletamisel kasutatud võtteid, saame

$$\varrho\frac{d\vec{v}}{dt} = -\mathrm{grad} p,$$

mis olekski vedeliku liikumisvõrrand rõhuväljas juhul, kui voolukiirus on ekvivalentne osakese liikumiskiirusega.

Reaalsed vedelikud.

Tundes ideaalse vedeliku voolamise seadusi, on meil suhteliselt lihtne kirjeldada ka reaalsete vedelike liikumist. Selleks lisame juba olemas olevatesse võrranditesse kaks vedelikku iseloomustavat näitajat:

- **Pindpinevus** on vedeliku pinnakihi omadus, mis väljendub vastuseisus vedeliku pinda suurendavatele jõududele.

Pindpinevust saab väljendada numbrilise kordaja - nn. **pindpinevusteguri** kaudu. See kordaja näitab, kui palju tuleb teha tööd vedeliku pinna suurendamiseks ΔS võrra:

$$A = \alpha \cdot \Delta S;$$

loomulikult on erinevatel vedelikel erinev pindpinevustegur α. Ka sõltub teguri väärtus välistingimustest nagu temperatuur, rõhk, vedelikku ümbritseva gaasi koostis.

Pindpinevus tekib vedeliku sisejõudude toimel ning püüab vähendada vedelikuosakese välispinda.

- **Sisehõõre** väljendab vedeliku voolamisel tekkivat takistusjõudu. Selle jõu tulemusel voolavad paigalseisva pinna (näiteks jõepõhja) lähedal olevad veekihid aeglasemalt kui sellest kaugemal olevad kihid.

Ka seda jõudu saab kirjeldada antud vedelikku iseloomustava suuruse - **sisehõõrdeteguri** abil.

Sisehõõrdumine tekib samuti sisejõudude toimel ning takistab vedeliku voolamist (vähendab kiirust).

Nii pindpinevuse kui sisehõõrde tekkepõhjuseks on **molekulide vahelised jõud**. Nende tänapäevane kirjeldus kuulub kvant-teooriasse; meie oma üldfüüsika kursusega nii kaugele ei jõua. Igapäeva-vajadusi rahuldab nende jõudude katseline kirjeldus (nn. **empiirilised valemid**), mille koostamist ja rakendamist õpite vastavate laboritööde teoreetilises osas.