Loeng 5. Jõuväljad

Ülemaailmne gravitatsiooniseadus. Newtoni mehaanika üheks suursaavutuseks loetakse gravitatsiooniseaduse formuleerimist. Mõnede ajaloolaste arvamuse kohaselt oli just juhuslikult pähe tulnud idee ülemaailmsest külgetõmbest see, mis ärgitas teda "Matemaatilisi printsiipe" kirja panema.

Ülemaailmse gravitatsiooniseaduse formuleeris Isaac Newton 1665. aastal.

Tõsi on see, et juba 22 aastat enne "Printsiipide" ilmumist, aastal 1665 avaldas Newton (oli siis kõigest 22 aastat vana!) arvamust, et planeetide liikumist juhivad raskusjõuga sama tüüpi jõud. Planeetide kohta käivad *Kepleri seadused* avaldati aastal 1619, kehade vaba langemise seaduse (kõik kehad langevad ühesuguse kiir(end)usega sõltumatult nende kaalust) avastas umbes samal ajal Galilei. Legend Newtonist, taevas paistvast Kuust ja kukkuvast õunast on hästi tuntud ja üsna tõepärane.

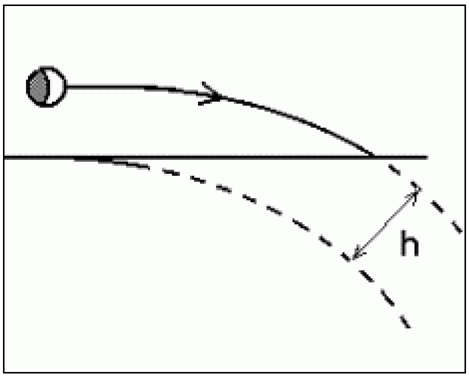
Esmakordselt avaldati seadus *"Loodusteaduse matemaatilistes printsiipides"* aastal 1685.

Niisiis:

> **Mistahes kaks keha tõmbavad teineteist jõuga, mis on võrdeline nende kehade massidega ja pöördvõrdeline nende vahelise kauguse ruuduga.**

Maapealsete kehade korral on gravitatsioonijõud kaduvväike ja tema mõõtmine nõuab ülitäpset eksperimenti.

Mida see tähendab? Maa tõmbab ühteviisi nii Kuud kui õuna; Kuu ei kuku alla selle pärast, et liikudes (Kepleri määratud) orbiidil, kukub ta kogu aeg Maakerast mööda (trajektoori kõverusraadius on võrdne Kuu kaugusega Maast (Maa keskpunktist). Trajektoori kõveruse põhjustab normaalkiirendus (kesktõmbekiirendus), mis on arvutatav Kuu kaugusest ja tiirlemisperioodist. Kesktõmbe-kiirenduse ja vaba langemise kiirenduse vahekord määrab tõmbejõu sõltuvuse kehade vahelisest kaugusest, ja kõige paremini sobib sinna kahanemine (pöörd)võrdeliselt kauguse kasvu ruuduga. Kui õun tormaks maapinna kohal kiirusega 8 kilomeetrit sekundis, ei kukuks temagi alla, vaid teeks maakerale poolteise tunniga ringi peale. Kuu asub Maa tsentrist 60 korda kaugemal kui maapind (380000:6370) ning kui temale mõjuv jõud oleks 3600 korda väiksem, teeks ta täistiiru täpselt 27.5 päevaga.

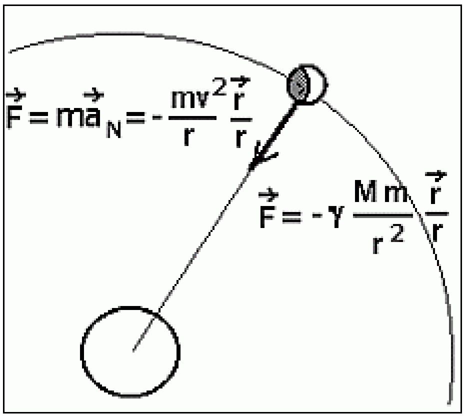


Maast "mööda kukkuv" Kuu: kuna maapind on kumer, ei jõua tema poole langev keha kunagi kohale.

Paraku arvati 1665.a., et Kuu kaugus Maast on 200000 km. Valem ei klappinud ja Newtonil tuli oodata 20 aastat, enne kui astronoomid oma vea parandasid.

Jääb üle leida veel võrdetegur. Et astronoomidel oli "valemi häälestamiseks" terve Päikesesüsteem, saadi selle leidmisega ruttu hakkama. Juba Newton teadis, et kordajaks on $\mathbf{6.67 \cdot 10^{-11} Nm^2kg^{-2}}$. Muidugi oli tolleaegsete ühikute järgi ka konstandil teine väärtus.

Et tegu on äärmiselt väikese arvuga (kaks tonnist tinamuna tõmbavad teineteist meetri kauguselt jõuga **6.65 ·10** $^{-5}$ N ehk 6.7 milligrammi!), õnnestus gravitatsioonikonstandi määramine laboris alles 120 aastat hiljem (H. Cavendish, 1798).



Sama füüsika keeles: trajektoori kõverdav kesktõmbejõud on võrdne raskusjõuga.

Räägime sellest nii pikalt selle pärast, et gravitatsiooniseaduse avastamine (sõnastamine?) on tegelikult Newtoni füüsika sõlmpunkt. Nii gravitatsiooniseadus kui Newtoni II seadus (inertsiseadus) seovad vastasmõju parameetri - **jõu** - kehade sisemise parameetri -**massiga**. Mõlemas valemis **jõud on võrdelises sõltuvuses massist**:

$$F = \gamma\frac{Mm}{r^2} = \left(\gamma\frac{M}{r^2}\right)m \quad \Longleftrightarrow \quad F = am.$$

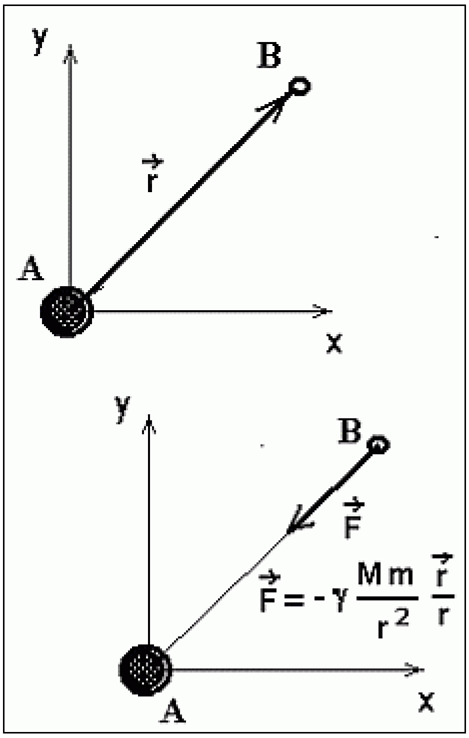
Kui need jõud võrdseks lugeda, taandub vaadeldava keha mass ***m*** välja ning keha kiirendus saab sõltumatuks keha massist. Nii realiseerub Galilei tähelepanek kehade vaba langemise kohta.

Miks need massid (inertne ja gravitatsiooniline) võrdsed on, selle kohta Newton "hüpoteese ei püstita". Ka tunnistas ta, et sellist seost pole võimalik tuletada ühestki teisest füüsika seadusest. Masside võrdsust on korduvalt kontrollitud, üheteistkümne numbrikoha ulatuses on nad samad. Vaba langemise seaduse formuleeris A. Einstein 1916.a. nn **ekvivalentsusprintsiibina:**

> **Raske ja inertne mass on ekvivalentsed;**
> **pole olemas füüsikalist eksperimenti, mis võimaldaks nende vahel vahet teha.**

Ekvivalentsusprintsiibil rajaneb tänapäeva valitsev gravitatsiooniteooria - *üldrelatiivsusteooria*. Selle järgi pole inertsiaalne (ühtlane sirgjooneline) liikumine põhimõtteliselt eristatav kõverjoonelisest (kiirendusega) liikumisest gravitatsiooniväljas. Einstein formuleeris selle samaväärsuse *ruumi kõverdumisena massiivsete kehade lähedal*.

Keerulise matemaatikaga teooria on sisemiselt kooskõlaline, igapäevaelus vajadus tema kasutamiseks puudub - Newtoni teooria on siin piisavalt täpne ja märksa kergemini rakendatav.



Tõmbejõu vektorkuju: kehale **B** mõjuv jõud $\vec{F}$ on vastassuunaline kohavektoriga $\vec{r}$.

Gravitatsiooniväli. Gravitatsiooniseadus kirjeldab **vastasmõju**, st. valemist arvutatud jõud mõjub mõlemale (vastasmõjus olevale) kehale. Et liikumisvõrrand kirjutatakse tavaliselt kindla keha jaoks, on otstarbekas eraldada üks kehadest (see, mille liikumist ei vaadelda) kui **gravitatsioonivälja allikas**; teise keha liikumist vaadeldakse-rehkendatakse siis *allika poolt tekitatud gravitatsiooniväljas*.

Kuna liikumise uurimine eeldab nagunii taustkeha olemasolu, võime lugeda selleks välja tekitava keha, nii, et taustkeha ja välja allikas moodustavad liikumise kirjeldamiseks vaja mineva taustsüsteemi - näiteks on ortonormaalne reeper, kus välja allikas asub koordinaadistiku nullpunktis. Teljed võime suunata suvaliselt.

Liikuv keha, mille asukoha määrab kohavektor $\vec{r}$, on nüüd gravitatsioonilises vastasmõjus taustkehaga. Temale mõjub gravitatsioonijõud, mis on suunatud taustkeha - koordinaatide alguspunkti poole. Sellist jõudu on lihtne kirja panna:

$$\vec{F} = \gamma \frac{Mm}{r^2} \left(-\frac{\vec{r}}{r} \right).$$

Sulgude ees olev liige (Newtoni gravitatsioonivalem) määrab jõu suuruse, sulgudes olev (ühik)vektor aga selle suuna. Et kohavektori suund on tõmbejõule vastassuunaline, tuleb ühikvektori $\vec{r}/r$ ette miinusmärk. Näeme, et vaadeldavale (proovi)kehale mõjuv jõud sõltub ruumikoordinaatidest, st. tegu on **jõuväljaga**.

Valemist on näha, et igale liikuvale kehale mõjuv jõud sõltub selle keha massist. Seda liikumisvõrrandi seisukohalt ebamugavat asjaolu saab kergesti kõrvaldada, defineerides välja iseloomustava suuruse - väljatugevuse:

> **Gravitatsioonivälja tugevuseks nimetame jõuväljas olevale kehale mõjuva gravitatsioonijõu suhet selle keha massiga:**

$$\vec{E}_g = \frac{\vec{F}}{m} = \gamma \frac{M}{r^2} \left(-\frac{\vec{r}}{r} \right).$$

Kehale mõjuvat jõudu on nüüd lihtne arvutada: tuleb vaid keha asukohale vastav väljatugevus korrutada keha massiga.

Väljatugevuseks antud punktis nimetatakse seal asuvale ühikulise massiga kehale mõjuvat jõudu.

Liikumisvõrrrandit teha on veel lihtsam: kuna keha kiirenduse leidmiseks tuleb leitud jõud (uuesti) massiga jagada, siis

> *gravitatsioonivälja tugevus antud punktis on nii suunalt kui väärtuselt võrdne selles punktis asuva keha kiirendusega.*

Saime väga mugava valemi. Koordinaatides väljendatuna:

$$E_{gx} \equiv a_x = -\gamma \frac{M}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} \cdot x;$$

$\boldsymbol{a_y}$ ja $\boldsymbol{a_z}$ avalduvad samamoodi.

Liikumisvõrrandi koostamiseks on otstarbekas ühendada teiste kehade mõjud ning avaldada saadud jõud kohavektori (ruumikoordinaatide) funktsioonina

Kui välja tekitavad mitu (punkt)allikat, tuleb väljatugevused summeerida. Seda võime teha nii vektorite kui koordinaatide tasemel.

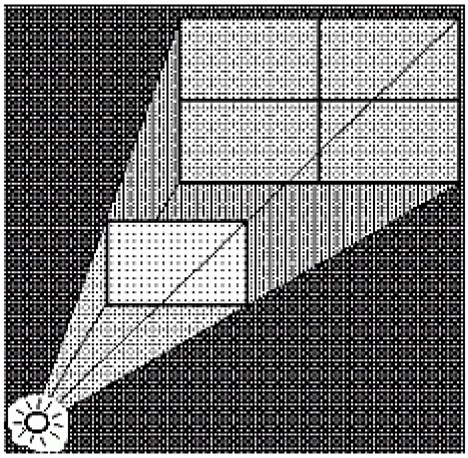
Newtoni ülemaailmse tõmbejõu valem kehtib täpselt ainult punktmasside korral

Mida aga teha siis, kui allikas polegi punktallikas? Siis läheb integreerimiseks, aga sellest täpsemalt elektri-osas.

Pöördruutsõltuvused. Kui lõpuni täpne olla, ei kehti gravitatsiooniseadus ülaltoodud kujul mitte igasuguste kehade, vaid ainult nn. **punktmasside** kohta. Punktmass kui arvutusi lihtsustav eeldus on laialt kasutatav kulgliikumise dünaamikas, kus keha kuju ja mõõtmed pole olulised, kuna pöördliikumist ei vaadelda. Täpselt defineerituna

> **punktmass on keha, mille mõõtmed pole antud ülesandes olulised ja mida seetõttu võib vaadelda punktina, kuhu on koondunud kogu keha mass**.

Gravitatsiooniväljas on punktmass välja allikaks. Füüsikas pole see ei esimene ega ainuke punktallikas. Valgusõpetuse - optika - fotomeetria-osas defineeritakse punktallikas, mille poolt esile kutsutud valgustatus kahaneb (pöörd)võrdeliselt kauguse ruuduga. Sama seaduse kohaselt kahaneb ka elektri- ja magnetväljade tugevus.



Pöördruutsõltuvus:
et lambist kiirguv valgus jaotub järjest suuremale pinnale, kahaneb pinna valgustatus (pöörd)võrdeliselt kauguse ruuduga - niisamuti kahaneb ka gravitatsioonijõud.

Jääb mulje, et kõigil neil juhtudel on tegemist teatud ruumipunktist kiirguva mõjuvooga, mis ruumi hajudes jaotub üha laiemale pinnale. Et allikat ümbritseva sfääri pindala on võrdeline raadiuse (tsentri kauguse) ruuduga, jaguneb tsentrist lähtuv (energia, mõju)voog kaugusega võrdelisele pindalale.

Kui lugeda mõju mõõduks pinnaühiku kohta tulev voog, saamegi mõju kahanemise pöördvõrdeliselt kauguse ruuduga - **pöördruutsõltuvuse** (ingl. *inverse square relation*).

Väidetavalt kajastub pöördruutsõltuvustes reaalse ruumi kolmemõõtmelisus. Valguse nõrgenemise seletusena on see omal kohal, miks aga kehtib (ja kas alati kehtib?) sama seadus jõuväljade korral, pole nii endastmõistetav.

Kaasaegne jõuväljade kvant-teooria tuletab pöördruutsõltuvuse sootuks teistsugustest printsiipidest. Praktilise rakenduse seisukohalt on tegemist matemaatiliselt äärmiselt ebamugava diferentsiaalvõrrandiga

$$r^2\ddot{\vec{r}} = -\gamma M,$$

millele algebralise lahendi leidmine õnnestub vaid lihtsaimatel juhtudel. Õnneks on seda tüüpi võrrandite numbriline (ligikaudne) lahendamine arvutis suhteliselt kerge ülesanne.

Potentsiaaliväljad. Nii gravitatsioonivälja kui teisi jõuvälju on võimalik esitada ka välja paigutatud kehade potentsiaalse energia abil. See lihtsustab rehkendamist, kuna erinevalt jõust on potentsiaalne energia skalaarne suurus, pealegi on tema valem - vähemalt pöördruutsõltuvuste korral - lihtsam kui jõuväljade oma.

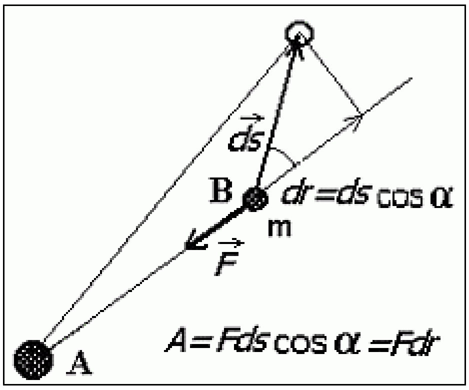
Töö gravitatsiooniväljas. Vaatame lihtsat ülesannet, kus punktmassi gravitatsiooniväljas liigub piki mingit trajektoori proovikeha massiga m. Kehale mõjub tsentrisse suunatud gravitatsioonijõud $\vec{F}_g = \vec{E}_g \cdot m$. Liikumisel punktist Apunkti B teevad gravitatsioonijõud töö:

$$A = \int_A^B \vec{E}_g \cdot m \cdot \vec{dr} = -\gamma M m \int_A^B \frac{\vec{r}\vec{dr}}{r^3}.$$

Kuidas sellest võrrandist aru saada? Integraali aluse avaldise lugejas on vektorite skalaarkorrutis $\vec{r}\vec{dr}$. Kui see nüüd tuimalt piki koordinaate lahti kirjutada, tekib võrrand, millega me midagi peale ei suuda hakata. Kui aga natuke mõelda...

Kuidas tsiteeritud korrutis tekib? $\vec{r}$ tuleb jõu valemist (vastab suurusele $\vec{F}$ töö valemis). Kohavektori lõpmata väike muut $\vec{dr}$ etendab tee pikkuse (nihke) osa. Nagu varem õpitud, on "töö võrdne keha poolt laäbitud tee pikkuse ja jõu liikumissuunalise projektsiooni korrutisega". Skalaarkorrutis seda tähendabki: ühe vektori korrutis teise vektori projektsiooniga esimese suunale.

Kumb kummale, on matemaatiliselt ükspuha. Matemaatiliselt on $\vec{r}\vec{dr} = rdr$, ükskõik, mida ja mil viisil me projekteerime. Joonisel on $\vec{dr}$ projekteeritud $\vec{r}$ suunale ja sama võime teha kõigi analoogiliste liidetavatega integraalialuses "summas".



Gravitatsioonijõu töö ei sõltu liikumisteest.

Nüüd läheb kiiresti. Integraal skalaarkorrutisest muutub lihtsaks ühemõõtmeliseks (määratud) integraaliks piki raadiust:

$$A = -\gamma M m \int_{r_A}^{r_B} \frac{rdr}{r^3} = -\gamma M m \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = -\gamma M m \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right).$$

Mida see meile ütleb? Kõigepealt seda, et

> gravitatsioonijõud on ***konservatiivne,*** tema töö ei sõltu liikumisteest, vaid ainult alg- ja lõpp-punktist.

Järelikult võime tehtud töö samastada potentsiaalse energia muutusega.
Ja loomulikult tuleb arvestada märgireeglit:

> potentsiaalne energia **kasvab, kui töö on negatiivne**, st keha liigub vastupidiselt välja suunale.

$$\Delta U = \gamma Mm\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right) = \frac{\gamma Mm}{r_B} - \frac{\gamma Mm}{r_A} = U(B) - U(A),$$

kus

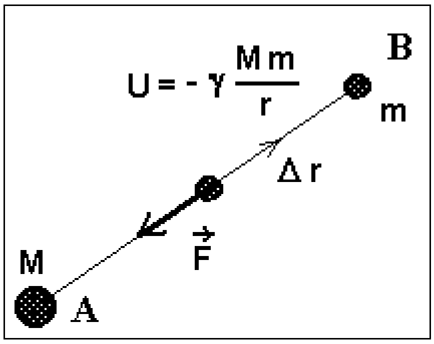
$$U = \frac{\gamma Mm}{r}.$$

Näeme, et kui $r \to \infty$, siis $U \to 0$, ise seejuures kasvades. Keha eemaldumisel välja allikast energia kasvab ... kuni saab nulliks!

Siingi on matemaatiline väljapääs: tuleb kokku leppida, et potentsiaalne energia vähemalt pöördruutsõltuvusega väljades on **negatiivne**. Ainult sel teel saab vastuolu lahendada.

Meenutame, et tegelikult on määratud vaid potentsiaalse energia muut. Kui tahame saada valemisse kindlaid arve, tuleb energia väärtus mingil kaugusel ette anda. Praegu me normeerisime energia nulliks lõpmata kaugel allikast. Seegi määrang kõlbab - ja on, nagu järgnevalt näeme, äärmiselt otstarbekas.

Potentsiaaliväli ja jõuväli. Nagu jõu arvutamisel võime ka siin eraldada välja allika vaadeldavast kehast. Selleks toimime analoogiliselt väljatugevuse defineerimisega: jagame potentsiaalse energia vaadeldava keha massiga.



Punktmassi potentsiaal. Mida kaugemale viia keha **B**, seda rohkem tuleb teha tööd ja seda suurem on potentsiaalne energia.

Tekkinud väli - nimetame teda **potentsiaaliväljaks** - kuulub tevenisti allika juurde. Vaadates mingi teise keha liikumist, saame leida selle poolt tehtava töö, korrutades potentsiaali muudu vaadeldava keha massiga.

$$A = m(\varphi_B - \varphi_A) = m\Delta\varphi, \qquad \varphi = \gamma\frac{M}{r}.$$

Jõuvälja seos potentsiaaliväljaga. Nagu näeme, on töö arvutamine potentsiaali abil lihtne. Sellega potentsiaaliarvutuse head omadused aga ei piirdu.

Võtame gravitatsioonivälja potentsiaali avaldisest tuletise r järgi. Saame:

$$\frac{d\varphi}{dr} = \gamma M\frac{d}{dr}\frac{1}{r} = \gamma M\left(-\frac{1}{r^2}\right) = -\gamma\frac{M}{r^2} = E_g.$$

Näeme, et potentsiaali tuletiseks piki raadiust on väljatugevus. Ja ümberpöördult - potentsiaal on väljatugevuse integraaliks.

Kuna potentsiaal loetakse nulliks lõpmata kaugel allikast, peab ta (väiksematel kaugustel) olema negatiivne.

Et asi ei jääks liiga lihtsaks, tuletame meelde, et erinevalt potentsiaalist on väljatugevus **vektor**, st. teda iseloomustab kindel suund.

Kuna potentsiaalse energia muut on võrdne tööga (integraal jõu ja nihke korrutisest), peab jõud võrduma potentsiaali tuletisega.

Meie näites on küll juba teada, et jõud mõjub koordinaadistiku alguspunkti (välja allika) suunas. Üldjuhul ei tarvitse see nii olla. Näiteks kui meil on kaks välja allikat ja need mõlemad mõjutavad vaadeldavat keha.

Püüame tabada probleemi sisemist loogikat. Väljatugevus on potentsiaali tuletis tee pikkuse (täpsemalt nihke) järgi. Ta on vektor, järelikult peab tal olema suund. Kui keha liigub selles suunas, on temale mõjuv jõud samasuunaline nihkega. Sellisel juhul peab potentsiaal muutuma kõige kiiremini, kuna töö valemisse kuuluv liige $\cos(\angle(\vec{F}, \vec{dr}))$ on siis maksimaalne, võrdudes ühega. Väljatugevus peab olema suunatud sinna, kus potentsiaal muutub kõige kiiremini.

Kasutame diferentsiaalarvutust. Potentsiaali muutus (ühikulise massi nihutamisel tehtud töö) on lõpmata väikesel nihkel $d\vec{r}$ võrdne selle nihke ning väljatugevuse $\vec{E}$ skalaarkorrutisega. Koordinaatides saame:

$$d\varphi = \vec{E}\vec{r} = E_x dx + E_y dy + E_z dz,$$

mis pole midagi muud, kui liikumine lähtepunktist lõpp-punkti piki murdjoont. Et konservatiivsete jõudude korral töö suurus liikumisteest ei olene, on tulemus "otse minekuga" samaväärne.

Teeme veel ühe matemaatilise nipi. Potentsiaal φ on skalaarväli, seega kolmest ruumikoordinaadist x, y, z sõltuv funktsioon, teiste sõnadega kolme muutuja funktsioon. Tema täisdiferentsiaal avaldub

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}dz.$$

Mida me näeme? Aga seda, et väljatugevuse vektori $\vec{E}$ koordinaadid on võrdsed potentsiaali osatuletistega vastava ruumikoordinaadi järgi. Seega on väljatugevuse vektor

$$\vec{E} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\vec{k},$$

ehk, kasutades vektoranalüüsi sümboolikat:

$$\vec{E} = \mathrm{grad}\varphi.$$

Matemaatikud loevad seda nii: väljatugevus on potentsiaali **gradiendiks**.

Välja kui ruumifunktsiooni tuletist koordinaatide järgi nimetataks gradiendiks.

Jõuvälja valemi leidmiseks on tihti lihtsam leida potentsiaalivälja valem ja võtta sellest tuletis (gradient).

Sellega nad aga ei piirdu. Nad defineerivad vektori ∇, mille koordinaatideks on osatuletiste märgid $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ ning panevad gradiendi kirja kui selle vektor(operaator)i skalaarkorrutise potentsiaaliga:

$$\vec{E} = \nabla\varphi$$

ning arvavad, et seda on kergem meelde jätta.

Aga aitab selleks korraks.

Potentsiaalse energia miinimumi lause. Tuleme veel kord tagasi teisel loengul masinate juurde. Mõlemat pani käima raskusjõud, seega võis ka neid süsteeme iseloomustada potentsiaalse energiaga.

Teades, et potentsiaali tuletiseks on väljatugevus, võime väita, et kehale mõjuv jõud on potentsiaalse energia tuletiseks. Niisiis: kuna tasakaaluolekus peab kehale (süsteemile) mõjuv jõud olema null, on nulliga võrdne **potentsiaalse energia tuletis**.

Süsteemi tasakaaluasend on tuletatav potentsiaalse energia miinimumi lausest.

Kõrgemast matemaatikast on teada, et funktsiooni tuletis on null seal, kus funktsioon omab ekstremaalset (maksimaalset või minimaalset) väärtust. Seega on süsteem tasakaalus parajasti siis, kui tema potentsiaalne energia omab maksimaalset või minimaalset väärtust.

Pöörlevat süsteemi uurides leidsime, et tal oli kaks tasakaaluasendit, üks neist (alumine) oli püsiv, teisest (ülemisest) läks süsteem välja juba väikese häirituse tagajärjel. Proovime seda hinnata potentsiaalse energia tuletiste abil.

Võtame potentsiaalsest energiast teist järku tuletise - see on jõu (esimene tuletis!) tuletis nihke järgi Kui see tuletis on negatiivne, kutsub nihe esile jõu, mis on suunatud nihkele vastassuunas.

> Sellist jõudu nimetatakse *taastavaks jõuks* ja ta püüab süsteemi tasakaaluasendisse tagasi viia.
>
> Sellist tasakaalu nimetatakse **püsivaks tasakaaluks**.

Kui teine tuletis on positiivne, tekib nihkega samasuunaline jõud ja tasakaal kaob.

Mida öeldakse teist järku tuletiste kohta? Matemaatilises analüüsis tähendab negatiivne teist järku tuletis funktsiooni maksimumi, positiivne miinimumi. Meie seade peaks selle loogika järgi püüdlema maksimaalse potentsiaalse energiaga asendi (ülemise "surnud punkti") poole.

Millest niisugune absurdne järeldus?

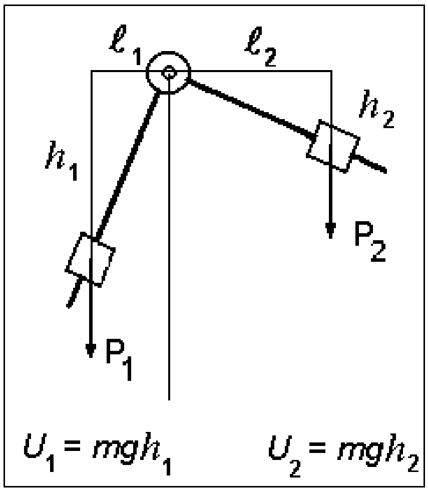
Mõelge. Annan vihje: vaadake märgiprobleemi!

Seniks aga potentsiaalse energia miinimumi lause:

> **Süsteem on püsivas tasakaalus parajasti siis, kui tema potentsiaalne energia on minimaalne.**

See on loodusseadus: kõik mehaanilised, füüsikalised, keemilised jne. süsteemid püüdlevad minimaalse energiaga seisundi poole. Mehaanilised süsteemid on neist kõige lihtsamad, edaspidises tutvume ka keerulisemate süsteemide dünaamikaga.

Lõpetuseks **ülesanne:** näidake, et ka meie teise masina tasakaaluseisund on tuletatav potentsiaalse energia miinimumi lausest!



Abiks ülesandele: "murtud kangi" tasakaaluasendi arvutus potentsiaalse energia tuletise abil.