Loeng 4. Töö ja energia.

Liikumisvõrrandi lahendamisel esile kerkivad probleemid sunnivad tähelepanu pöörama liikumisele kui keha oleku muutusele. On selge, et liikumine võib toimuda ka ilma jõudude (st. teiste kehade) abita. See ühtlane sirgliikumine tähendab Newtoni I seaduse kohaselt aga mitte oleku muutust, vaid kindlat **oleku liiki** (... *säilitab oma oleku kas paigalseisu või ühtlase sirgjoonelise liikumise kujul* ...). Ja niisama selge on see, et ükskõik kui suure jõu mõju ei suuda muuta keha olekut - kuni puudub liikumine.

Oleku muutust saab mõõta protsessi iseloomustava suuruse - **töö** abil.

Järelikult tähendab oleku muutumine **liikumise muutumist jõudude mõjul**. Selle muutuse ulatuse mõõtmiseks on füüsikutel eriline suurus -- töö:

TÖÖ on keha liikumisoleku muutumise mõõt, mis on võrdne keha poolt läbitud tee pikkuse ning kehale mõjuva jõu liikumissuunalise komponendi korrutisega.

Töö arvutamisel läheb arvesse ainult jõu liikumissuunaline komponent, kuna just selle (komponendi) mõjul toimub oleku muutus.

Juhime tähelepanu sellele, et töö ei ole mitte ***olekut*** (näiteks liikumist), vaid selle ***muutumist*** kirjeldav suurus. Seega ei iseloomusta ta mitte keha, vaid **protsessi**.

Töö on protsessi kirjeldav parameeter.

Töö ühik ja mõõtmine. Et tee pikkuse ühikuks on meeter (m) ja jõu ühikuks njuuton (N), peaks töö ühikuks sobima nende korrutis. Nii see ka on, ja valemi lihtsuse huvides on jällegi võetud ühik nii, et mingeid täiendavaid kordajaid ei tule:

Töö ühikuks SI süsteemis on **dzaul**, tähis **J**, dimensioon ***kg m***^{2}***s***$^{-2}$.

Töö ühikuks on dzaul (J), mis on võrdne tööga, mida teeb liikumissuunaline jõud üks njuuton tee pikkusel üks meeter.

Seega on ühe dzauli dimensiooniks $J \equiv Nm = kgm^2s^{-2}$

Nimetus on antud inglise füüsiku James Joule (1818 - 1889) järgi. Tema nimelisi seadusi õpime hiljem.

Töö arvutamine. Definitsiooni järgselt tuleb töö leidmiseks projekteerida kehale mõjuv jõud tema liikumise suunale ning seejärel korrutada asendi muutuse - nihkega. Mõlemad (nii jõud kui nihe) on **vektorid**. Töö seevastu on selgelt suunatu, st. **skalaarne** suurus. Pole võimalik ju öelda, mis suunas tööd tehakse.

Koolifüüsika töö valemiks on $A = F \cdot s \cdot \cos\alpha$. Kui sellest valemist pilt teha, näeme, et ta kehtib sirgliikumisel, kui jõud $\vec{F}$ mõjub liikumissuunaga nurga all. Põhimõtteliselt saame hakkama ka ilma koosinuseta, võttes "tee pikkuse" s asemel nihkevektori $\vec{s} = \Delta\vec{r}$.

Nii tekib korrektne valem

$$A = \vec{F}\vec{s} = Fs\cos(\angle(\vec{F}\vec{s}));$$

kus $\vec{s} = \Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ ning $(\angle(\vec{F}\vec{s}))$ tähistab vektorite vahelist nurka.

Töö valemis rakendame vektoralgebrast tuntud tehet - **vektorite skalaarkorrutist**. Kui see koordinaatidesse ümber panna, saame väga mugava valemi:

$$A = F_x\Delta x + F_y\Delta y + F_z\Delta z,$$

mis kahjuks kehtib vaid sirgliikumise ja muutumatu jõu korral.
Kui liikumine on kõverjooneline või kui jõud muutub, kehtib see valem üksnes lõpmata väikesel nihkel $d\vec{s}$. Et leida tööd mingi pikema liikumise korral, tuleb võtta integraal:

$$A = \int_a^b \vec{F}(t,\vec{r})d\vec{r} = \int_a^b (F_x dx + F_y dy + F_z dz).$$

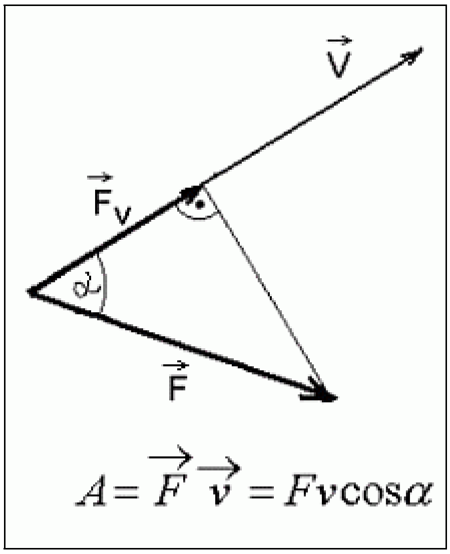
Valem näib lihtne, aga ei ole seda. Me ei tohi sulge avada, sest tegu pole "tavalise" määratud integraali, vaid **joonintegraaliga**. See tähendab, et integreerimine toimub piki kindlat **joont**, milleks mehaanikaülesannetes on trajektoori lõik punktist a punktini b.

Need punktid asuvad ruumis ja neil on samuti kolm koordinaati (kohavektori komponendid). Kui valida teistsugune trajektoor, saame integraalile tavaliselt ka teistsuguse väärtuse. Ja jõuvektori komponendid F_x, F_y, F_z on kõik ruumi ja aja funktsioonid.

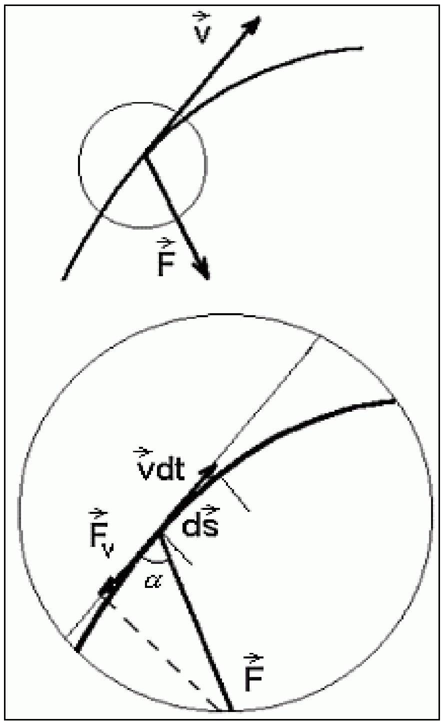
Kuidas seda integraali siis arvutada? Kui on teada keha liikumisvõrrand $\vec{r} = f(t)$, saame kõik integraali all olevad muutujad anda aja funktsioonidena, taandades joonintegraali tavaliseks ühemõõtmeliseks (määratud) integraaliks.

Kui tahaksime teha näiteks arvutiprogrammi, siis tuleks iga ajahetke jaoks leida keha asukoht (liikumisvõrrandist) ja jõu valemi $\vec{F} = f(x, y, z, t)$ abiga arvutada jõu kolm komponenti. Seejärel korrutame neid vastavate koordinaatide muutudega

Töö arvutus:



a) sirgjoonelisel liikumisel



b) kõverjoonelisel liikumisel

$dx = \dot{x}dt, \quad dy = \dot{y}dt, \quad dz = \dot{z}dt$. Ja alles siis võib integraali anda kolme eraldi integraali summana - kusjuures nad kõik on integraalid **aja**, mitte koordinaatide järgi.
Matemaatikud nimetavad seda "joonintegraali viimiseks parameetrilisele kujule". Parameetriks on aeg - nagu liikumisülesannetes ikka.

Kordamise huvides: mida kujutavad endast $\dot{x}, \quad \dot{y}, \quad \dot{z}$?

Võimsus ja kasutegur Tehnilistes ülesannetes pole tihti tähtis mitte niivõrd mehhanismi poolt tehtud töö, kui **töövõime**. Sellistel juhtudel arvutatakse keha poolt ajaühiku kohta tehtav töö, mida nimetatakse **võimsuseks**:

> **Võimsus on keha (kehade süsteemi, mehhanismi) töövõimet iseloomustav suurus, mis on võrdne ajaühiku kohta tehtava tööga**.

Töö tuletist aja järgi nimetatakse **võimsuseks** Võimsus iseloomustab töötavat seadet ja väljendab selle poolt ajaühikus tehtavat tööd

Võimsuse ühikuks on **vatt** (tähis W). Üks vatt vastab võimsusele, kus sekundis tehakese üks dzaul tööd.

Võimsuse ühikuks SI süsteemis on **vatt**, tähis **W**, dimensioon ***kg*** $m^2 s^{-3}$.

Ühik on nimetatud 1784. a. esimese kasutuskõlbliku aurumasina konstrueerinud inglise leiduri James Watt'i järgi.
Seniõpitud suurustest sarnaneb võimsus kõige rohkem kiirusele (ajaühiku kohta läbitud tee pikkus). Ja nagu kiirust saab ka võimsust arvutada tuletisena aja järgi:

$$P = \frac{dA}{dt}$$

Selliselt arvutatud võimsust nimetatakse **hetkvõimsuseks**. Kasutatakse ka keskmist võimsust ($P = A/t$), nimivõimsust ja maksimaalselt lubatavat võimsust. Viimased kaks on juba tehnikaalased terminid.

Seadme efektiivsust iseloomustab **kasutegur**
Kasutegur väljendab kasuliku töö ja kogutöö (kulutatud energia, kütuse jms) suhet. Teda võib arvutada ka kui võimsuste suhet.

Kasutegur on **dimensioonita suurus**. Tavaliselt antakse ta **protsentides**.

Kasulik töö, kogu töö, kasutegur. Looduses ja tehnikas on jõudusid, mille tehtud töö ei muutu mehaaniliseks energiaks, vaid "läheb kaotsi" (tavaliselt muutub soojuseks). Selliseid jõudusid nimetataks **mittekonservatiivseteks** (energiat mitte säilitavateks) ja nende näiteks on hõõrdejõud ja takistusjõud. Kui soovime leida töö valemi abil energiamuutust (või energia jäävuse seaduse abil tööd), tuleb mittekonservatiivsete jõudude töö vaatlusest välja jätta. Kõige lihtsam on seda teha **kasuteguri** abil:

> **Seadme kasuteguriks nimetatakse samas ajavahemikus tehtud kasuliku (energiat muutva) töö ja kogu tehtud töö suhet.**

Et ajaühikus tehtud töö kannab nimetust "võimsus", saab kasuteguri avaldada ka võimsuste suhtena. Kokku saame ilusa valemite komplekti:

$$\eta = \frac{A_{kasulik}}{A_{kogu}} \longrightarrow A_{kasulik} = \eta A_{kogu};$$

$$\eta = \frac{P_{kasulik}}{P_{kogu}} \longrightarrow P_{kasulik} = \eta P_{kogu}.$$

Mida kujutas endast kaotsi läinud "mittekasulik" töö, meid neis valemites enam ei huvita.

Energia kui olekuparameeter. Niisiis väljendab töö keha (liikumis)oleku muutust. Oleks loomulik, kui seda "olekut" saaks kirjeldada samuti mingi suurusega, mis on tööga samanimeline ja mis töö käigus muutub. Selliseks suuruseks on **energia**:

Energia on keha olekut kirjeldav suurus, mille muut on võrdne ja vastasmärgiline selle keha poolt tehtava tööga.

Niisiis:

- kui keha teeb tööd, tema energia väheneb.
- Kui tööd teevad teised kehad (mille mõju on keha poolt avaldatava jõuga vastasmärgiline), energia suureneb.

Energia iseloomustab keha olekut oleku muutmiseks tehtava töö kaudu.
Teda mõõdetakse samades ühikutes kui töödki.

Kineetiline energia. Vaatleme lihtsaimat juhtu, kus kehale massiga m mõjub konstantne jõud $\vec{F}$. Et asi veel lihtsam oleks, võtame sellise taustsüsteemi, kus keha hetkel $t = 0$ on paigal ($\vec{v_0} = 0$). Selline keha hakkab liikuma sirgjooneliselt (mitteühtlaselt, kiirus kasvab!) ja hetkeks t on tema kiirus:

$$\vec{v} = \vec{a}t = \frac{1}{m}\vec{F} \cdot t.$$

Kiiruse muutus tähendabki oleku muutust: olek hetkel t erineb olekust hetkel $t = 0$ selle poolest, et keha liigub nüüd kiirusega $\vec{v}$.

Arvutame nüüd jõu $\vec{F}$ poolt ajavahemiku t jooksul tehtud töö. Et liikumine oli jõu mõjumissuunas, on vektorite vaheline nurk null ja selle koosinus 1. Järelikult on töö A võrdne jõu F ja läbitud tee pikkuse s korrutisega. Viimase leiame valemist

$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2m}Ft^2$$

ja töö

Tähelepanu! - nii töö kui energia väärtused sõltuvad taustsüsteemist!

Üleminekul teise, esialgse suhtes liikuvasse taustsüsteemi ei saa töö ja energia väärtusi üle kanda. Nad tuleb uuesti arvutada ja nad kehtivad ainult vaadeldava süsteemi piires.

$$A = \frac{1}{2m} Ft^2 \cdot F = \frac{1}{2m} F^2 t^2.$$

Suuruse Ft leiame kiiruse valemist:

$$\vec{v} = \frac{1}{m}\vec{F} \cdot t \quad \Longrightarrow \quad Ft = mv$$

ja asendame töö valemisse:

$$A = \frac{1}{2m}(mv)^2 = \frac{mv^2}{2}.$$

See töö kulus liikuma pandud keha energia suurendamiseks:

$$\Delta E = \frac{mv^2}{2} = E_{kin}$$

juhul, kui keha seisis enne jõu mõjuma hakkamist paigal.

Leitud suurust E_{kin} nimetatakse **keha kulgeva liikumise kineetiliseks energiaks**.

Kui keha seisab (mingis taustsüsteemis!) paigal, on tema kineetiline energia (selles süsteemis!) null. Mingis teises süsteemis võib sama keha kineetiline energia nullist erineda, sel juhul tingib välisjõu mõjumine energia **muutumise**.
Saab näidata, et kui keha liigub algul näiteks kiirusega v_0, on tehtud töö võrdne kineetilise energia **muutusega** ΔE_{kin}. Seda isegi juhul, kui jõud on esialgse liikumissuunaga nurga all.

Kineetiline energia on liikuva keha energia.
Et selle keha liikumist peatada, tuleb teha samapalju tööd, kui kulus keha liikuma panemiseks..

Tõestage seda! Võtke algkiiruseks v_0, mis on x-telje suunaline ja pange jõud $\vec{F}$ mõjuma sellega $45°$ nurga all. Leidke jõu x- ja y-komponendid, arvutage kiirendused ja seejärel liikumisvõrrandist uus kiirus

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

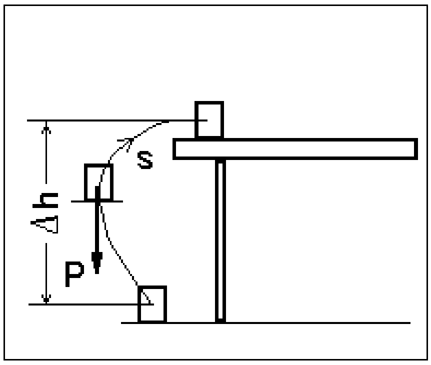
.

Kui suudate arvutada ka (kõverjoonelisel liikumisel!) tehtud töö, näete, et see on täpselt võrdne kiirustele $\vec{v}$ ja $\vec{v_0}$ vastavate kineetiliste energiate vahega.

Hoiatan: tegu on tõsise rehkendusega! Kel algebraga raskusi, võib mingil momendil tähtede asemele numbrid panna.

Potentsiaalne energia. Välisjõudude töö ei tarvitse alati keha energiat suurendada. Ülesvisatud keha liikumisel mõjub talle Maa külgetõmbejõud, mis aga ei suurenda, vaid hoopis vähendab keha kiirust. Koos sellega väheneb ka keha kineetiline energia.

Kui üles visatud keha peatub, saab nulliks ka tema kineetiline energia. See ei tähenda aga sugugi, et **kogu energia** nulliks muutub. Sama keha kogub alla kukkudes uuesti kiirust ja tema kineetiline energia kasvab sellesama Maa külgetõmbejõu mõjul.



Keha liigutamisel ei sõltu raskusjõu töö liikumisteest, vaid ainult alg- ja lõpp-oleku kõrguste vahest.

Siit: liikumisenergia pole ainus (mehaanilise) energia liik. Keha võib omada energiat ka oma asukoha tõttu teiste kehade suhtes. Üles riputatud raskus, pingule keeratud vedru, veehoidla tammi taha kogunenud vesi - kõik need omavad mingit energiavaru, mida nimetatakse **potentsiaalseks energiaks**. Nagu kiiruse muutmiseks, tuleb ka jõudude mõju all oleva keha asukoha muutmiseks teha tööd. Ja nagu liikumise korralgi loetakse tehtud töö positiivseks, kui keha energia kasvab ning negatiivseks, kui energia kahaneb.

Potentsiaalse energia muutumise valem sõltub jõudude tüübist. Raskusjõu korral on üles tõstetavale kehale mõjuv jõud konstantne ($\vec{P} = m\vec{g}$) ning tehtav töö on võrdeline kõrguse muutusega ($A = \vec{P}\vec{h} = -mgh$), kuna raskusjõud $\vec{P}$ning vertikaalnihe $\vec{h}$on vastassuunalised.

Vedru venitamisel kasvab elastsusjõud võrdeliselt venituse ulatusega (deformatsiooni suurusega, $\vec{F_e} = -k\vec{l}$) ning

$$A = \int F_e dl = \int(-kl)dl = -(kl^2)/2$$

.

Normeerimine. Toodud valemid näitavad keha nihutamisel tehtud tööd. Juhime tähelepanu asjaolule, et kirja pandud integraalid on antud *määramata integraali kujul* ja seepärast peaks lõppvalem sisaldama aditiivset (juurde liidetavat) integreerimiskonstanti C. Tegelikult on nihkel alati algus ja lõpp, mis, kajastudes integreerimistee otspunktidena ($h_1 \to h_2, \quad -l_1 \to l_2$), teeb määramata integraalist määratud integraali.

Kui rääkida energiast, siis meie näidetes on sellelgi "normaalne", valemist endast tulenev nullpunkt. Võttes üles tõstetava raskuse potentsiaalse energia valemiks $E_{pot}(h) = mgh$, saame energia nullväärtuse punktis $h = 0$. Sama tuleb välja elastsusjõu valemist ($E_{pot} = 0$ kui $l = 0$). Kui mingi jõud on nihke või selle ruuduga *pöördvõrdeline* (nagu gravitatsioonijõud), võime nullpunktiks valida ka lõpmatuse.

Energia nagu kõik määramata integraalid on määratud vaid konstandi täpsuseni. Selle konstandi leidmiseks peame teadma keha energiat mingil ajamomendil (või mingis kindlas punktis).

Üldjuhul on normeerimine suvaline ja seetõttu öeldakse, et potentsiaalne energia **on määratud aditiivse konstandi täpsusega**.

Mida see tähendas? Ja kas suudate näidata, et sama lause käib ka kineetilise energia kohta?

Märgiprobleem. Kui kineetilise energia avaldises oli kõik selge - jõud mõjus liikumise suunas ja kuna tema poolt tehtav töö suurendas liikuva keha energiat, pidigi märk olema positiivne. Ja kui jõud juhtus mõjuma liikumisele vastassuunas, tuli märk negatiivne ning kuna keha kiirus vähenes, vähenes ka liikuva keha (kineetiline) energia.

Kui jõud mõjub liikumise suunas, siis potentsiaalne energia väheneb, kineetiline aga kasvab.

Kui jõud mõjub liikumisele vastassuunas, siis kineetiline energia kahaneb, potentsiaalne aga kasvab.

Potentsiaalse energia korral tundub olevat vastupidi: kui nihe on jõu suunaga vastupidine (raskust tõstetakse ja vedru venitatakse vastu jõu mõjumissuunda), siis potentsiaalne energia kasvab. Ning kui raskust allapoole või vedru lõdvemale lasta, energia väheneb (kuigi liikumine toimub jõu mõjumise suunas).

See ongi **potentsiaalse energia märgiprobleem**.

Kui keha (süsteem) osutab talle mõjuvale jõule ***vastupanu***, salvestub selle jõu ***vastu*** tehtud töö potentsiaalse energiana. Et potentsiaalne energia saaks kasvada, peab lisaks raskus- või elastsusjõule kehale mõjuma veel mingi **vastas**suunaline välisjõud. Potentsiaalse energia omapära ongi selles, et *ta ei kehti kunagi üksiku keha, vaid kehade süsteemi kohta*. Sellesse süsteemi kuuluvate kehade vahel mõjuvaid jõude nimetame **sisejõududeks**, süsteemi kehadele väljaspoolt mõjuvaid aga **välisjõududeks**.

Potentsiaalse energia muutumist võivad esile kutsuda mõlemad, **kuid:**

> **süsteemi potentsiaalse energia suurenemine on võimalik üksnes välisjõudude töö arvelt.**

Nüüd peaks paistma ka märgiprobleemi lahendus: nii, nagu pole võimalik vedru pikenemine elastsusjõu arvel ei saa ka kehasid tõsta raskusjõu arvel. Mõlemad on sisejõud ja selleks et vedru hakkaks pikenema (keha ülespoole tõusma), peab talle mõjuma välisjõud, mis on vastassuunaline (vektorformalismis vastasmärgiline) nimetatud (sise)jõududega. Kui raskusjõu töö keha tõstmisel on negatiivne, siis temaga vastassuunalise välisjõu töö on loomulikult positiivne - ja just selle (välis)jõu töö suurendabki süsteemi potentsiaalset energiat.

Potentsiaalse energia märk valitakse vastavalt ülesande iseloomule.

Miks me siis üldse kasutame potentsiaalse energia valemis sisejõudusid? Võiks ju panna kohe valemisse vedru venitava välisjõu ning probleem oleks olematu!

Paraku pole see võimalik. Kui välisjõud oleks *täpselt võrdne* sisejõuga, oleks jõud tasakaalus ja mingit venitamist ei toimuks. Selleks, et vedru hakkaks pikenema (keha kerkima), peab välisjõud olema **suurem** sisejõust. Kui palju, pole oluline - ja enamikul juhtudest pole see ka täpselt määratav. Ja ainult **osa selle välisjõu tööst kulub potentsiaalse energia suurendamiseks**. Ülejäänu kas suurendab keha kiirust (kasvatades kineetilist energiat) või läheb kaotsi hõõrdumise ja õhutakistuse ületamisel. Täpselt on määratav ainult sisejõu ületamiseks kulunud töö ja seda kirjeldasidki ülaltoodud valemid.

Järelikult on potentsiaalse energia muut vastasmärgiline kehale mõjuva **sisejõu** poolt tehtava tööga. Kui panna nii kineetilise kui potentsiaalse energia muudu sõltuvus (välisjõudude poolt) tehtud tööst kirja valemitena, peame potentsiaalse energia miinusmärgi unustama, saades:

$$\Delta E_{kin} = A_1;$$

$$\Delta E_{pot} = A_2;$$

ja kogu tehtud töö

$$A = A_1 + A_2 = \Delta E_{kin} + \Delta E_{pot} = \Delta(E_{kin} + E_{pot}) = \Delta E,$$

kus $E = E_{kin} + E_{pot}$ ehk, kasutades teoreetilise mehaanika tavatähiseid,

$$E = T + U.$$

Keha või süsteemi kineetilise ja potentsiaalse energia summat nimetatakse **mehaaniliseks koguenergiaks**.

Suurust E nimetatakse **mehaaniliseks koguenergiaks**, teoreetilises mehaanikas ka *Hamiltoni funktsiooniks*.

Nagu järgnevas näeme, lihtsustab energia mõiste kasutamine paljude liikumisülesannete lahendamist. Muuseas - teoreetilises mehaanikas kasutatakse ka energia-avaldise tüüpi, kus potentsiaalse energia märk on muutmata. Saadud funktsiooni $L = T - U$ nimetatakse *Lagrange'i funktsiooniks e. lagranziaaniks*, nii et palun mitte segi ajada.

Energia jäävuse seadus. on otsene järeldus energia valemist. Kui "mehaanilise koguenergia muutus on võrdne välisjõudude poolt tehtud tööga", siis sellest järeldub, et välisjõudude töö puudumisel on koguenergia muutus null. Ja kui mingi suuruse muutus on null, tähendab see, et vaadeldav suurus on muutumatu e. jääv.

Konservatiivsed ja mittekonservatiivsed jõud. Enne kui energia jäävuse seaduse kirja paneme, täpsustame tema kehtivuse piire.

Esiteks on lisaks välisjõududele olemas ka süsteemi kehade vahel mõjuvad *sisejõud*, mille töö tulemusel võib energia samuti muutuda. Nimelt on olemas terve rida jõudusid, mille toimimise käigus mehaaniline energia hajub, muutudes teisteks energialiikudeks - näiteks soojus- või elektrienergiaks.

Nii neid jõudusid ka nimetatakse - **mittekonservatiivseteks** (ld. *conservare* -- säilitama), mõnikord ka **dissipatiivseteks** (ld. *dissipatio* -- hajuma, kaduma) jõududeks.

Tüüpilised mittekonservatiivsed jõud on näiteks hõõrde- ja takistusjõud: nende poolt tehtav "töö" tähendab igal juhul kaotsi läinud energiat. Linnasõidul on auto kütusekulu alati suurem, kuna sagedased pidurdamised hajutavad liikumisenergiat. Maanteel sõltub kütusekulu kiirusest, kuna õhutakistus on võrdeline kiirusega. (Kiirustel üle 30 m/s e. 0.1 helikiirust hakkab takistus kasvama isegi võrdeliselt kiiruse ruuduga, sellest ka suurenenud kütuse kulunormid 120-kilomeetrise tunnikiiruse korral.)

Teine vajalik täpsustus puudutab "välisjõudude tööd", mille nulliga võrdumine tähendab kas jõu või liikumise puudumist. Viimane neist on liig suur piirang: kui ükski keha ei liigu, pole mõtet rääkida ka oleku muutumisest (liikumisest). Järelikult piirdume jõudude kohta käiva tingimusega. Kokku saame:

> **Süsteemis, mille sisejõud on konservatiivsed, on välisjõudude puudumisel mehaaniline koguenergia jääv.**

"Jääv" tähendab matemaatikas ja füüsikas protsessi vältel muutumatut suurust; "konstantne" käib tavaliselt konkreetse seisundi (oleku) kohta. Pole suur viga, kui neid lugeda sünonüümideks.

Ülesanne pidurdavast autost. Kui seaduses toodud tingimused pole täidetud, annab energia jäävuse seadus äärmiselt praktilise eeskirja paljude dünaamika ülesannete lahendamiseks:

> **Süsteemi mehaanilise energia muut võrdub välisjõudude tehtud töö ning kõigi protsessis osalevate mittekonservatiivsete jõudude poolt tehtava töö vahega**

$$\Delta E = \sum A_v - \sum A_{mk}.$$

Kuidas seda valemit kasutada, selgub järgmisest näitest. Olgu meil tavaline mehaanika ülesanne:

Milline peaks olema pidurdav jõud, et peatada kiirusega 108 km/h liikuv auto, mille mass on 1 t, 50 meetri piikusel lõigul? Millise hõõrdeteguri korral on selline pidurdamine üldse võimalik?

Et praktikumis sai sellega juba vaeva nähtud, ei hakka me praegu rassima Newtoni seadustega, vaid paneme kohe kirja energia jäävuse seaduse:

$$\Delta E = \Delta\left(\frac{mv^2}{2}\right) = A_v = Fs = -\mu mgs,$$

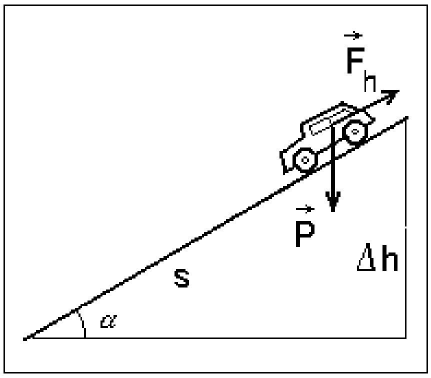
millest leiame vahetult otsitavad suurused:

$$F = \Delta\left(\frac{mv^2}{2}\right) : s = \frac{-mv_0^2}{2s} = \frac{1000\ kg \cdot (30\ m/s)^2}{2 \cdot 50\ m} = -9000\ N;$$

$$\mu = \Delta\left(\frac{mv^2}{2}\right) : (mgs) = \frac{-v_0^2}{-2gs} = \frac{(30\ m/s)^2}{2 \cdot 10\ m/s2 \cdot 50\ m} = 0.92.$$

Vapustav, aga mitte veel kõik. Kujutame ette, et pidurdamine toimub mitte tasasel maal, vaid tõusul või langusel. Kui tahaksime nüüd lähtuda Newtoni seadustest, tuleks meil vaadelda liikumist kaldpinnal, jagada jõud komponentideks jne. Energia valemi abil saame lihtsalt energia avaldisse täiendava liikme:

$$\Delta E = \Delta\left(\frac{mv^2}{2} + mgh\right) = A_v = Fs = \mu mgs$$



Auto pidurdamisel peab pidurdav jõud lisaks kineetilisele energiale kustutama ka langusele vastava potentsiaalse energia **E** $= mg\Delta h$.

Lisaliige mgh asub sulgudes, järelikult lisandub valemisse liige $\Delta mgh = mg\Delta h$, kuna kolmest valemis olevast suurusest muutub vaid kõrgus. Tavaliselt antakse tee kalle protsentides; vaatame juhtu, kus pidurdamine toimub vastu mäge, mille tõus on 5%. Matemaatiliselt tähendab see, et $\Delta h = 0.05s$. Et pidurdamine toimub vastu mäge, kasvab selle käigus potentsiaalne energia. Jõu valemiks saame:

$$\frac{-mv_0^2}{2} + 0.05mgs = Fs$$

$$F = \frac{-mv_0^2}{2s} + 0.05mg \quad (= -9000 + 490 = -8510\ N).$$

Lahendus on vapustavalt lihtne. Proovimiseks arvutage, milline peaks olema **hõõrdetegur**, kui soovime autot **laskumisel** pidama saada.

Liikumisintegraalid. Tasub meelde jätta: alati, kui liikumisülesandes küsitakse sõltuvust kehale mõjuva jõu ning tema poolt läbitud tee pikkuse vahel, on kasulik rakendada energia jäävuse seadust. Selle pärast, et **töö on integraal jõust ja tee pikkusest**. See integraal on võrdeline liikumise käigus tekkiva energiate vahega. Energia muutus (lõpp- ja algenergia vahe) on seega liikumise integraalne (summeeruv) muutus ning seepärast võib energiat nimetada **liikumisintegraaliks**.

Nagu eelnevas ülesandes nägime, aitab tema kasutamine vältida kiirenduse (kiiruse tuletise) leidmist. Selle asemel, et töötada tuletistega, töötasime integraalidega.

Energia pole ainuke liikumisintegraal. Integreerides Newtoni II seadust, saame:

$$a = \frac{F}{m} \quad \Rightarrow \quad F = ma = m\frac{dv}{dt} \quad \Rightarrow Fdt = d(mv).$$

$$\int_{t_1}^{t_2} Fdt = \int_{mv_1}^{mv_2} d(mv) \quad \Rightarrow F\Delta t = \Delta(mv) = \Delta p.$$

$p = mv$ on keha **impulss ehk liikumishulk**.

Kuna Newtoni II seaduse (originaalformuleeringu) järgi toimub impulsi muutus jõu $\vec{F}$ mõjumise suunas, kehtib saadud valem kõigi jõuvektori komponentide, seega kogu jõuvektori kohta.

$$\vec{F} \cdot \Delta t = \Delta m\vec{v}.$$

Proovige ja te veendute, et ka see liikumisintegraal lubab kiiresti ning kadudeta lahendada liikumisülesandeid. Seekord selliseid, kus kasutatakse seost jõu F ning tema toimimisaja Δt vahel.

Ja nagu energia, nii võime ka impulsi kohta anda jäävusseaduse. See on siis **impulsi jäävuse seadus**.

Kui süsteemile mõjuvate välisjõudude summa on null, on süsteemi kehade impulsside summa jääv suurus.

NB! Seaduses on rõhutatud, et oluline on üksnes välisjõudude mõju. Millised jõud mõjuvad süsteemi kuuluvate kehade vahel, pole seega oluline.

Kas suudate seda tõestada? Annan vihje: Newtoni II seaduse kohaselt mõjuvad jõud ainult paariti ja seejuures vastassuunas. Mis järeldub siit impulsside kohta?