

Loeng 3. Newtoni dünaamika

Dünaamika. Sõnaga dünaamika (kr. *dynamis* - jõud) nimetatakse mehaanika osa, mis kirjeldab kehade vahelise vastasmõju seost liikumisega. Põhilise osa temast annavad erinevate vastasmõju liikide (eri tüüpi jõudude) matemaatilise formuleerimise ning vastavate (teist järku!) diferentsiaalvõrrandite lahendamise probleemid.

Newtoni seadused. Klassikalise dünaamika aluseks on kolm Newtoni poolt formuleeritud seadust. Newton oma 1687. a. ilmunud teoses **Loodusfilosoofia matemaatilised printsiibid** (*Philosophiae naturalis principia mathematica*) püüdis füüsikat üles ehitada klassikalise geomeetria kombel, tuletades kõigi talle teada olevate nähtuste kirjeldused kolmest põhipostulaadist.

Koolifüüsika formuleeringus oleksid need (nn. Newtoni seadused):

1. Iga keha seisab paigal või liigub ühtlaselt sirgjooneliselt kui talle ei mõju teised kehad või kui nende kehade mõjud kompenseeruvad.
2. Keha kiirendus on võrdeline talle mõjuva jõuga ning pöördvõrdeline keha massiga.
3. Kaks keha mõjutavad teineteist alati jõududega, mis on suuruselt võrdsed ja suunalt vastupidised.

Et tegu on kogu füüsika seisukohalt **äärmiselt olulise** momendiga, anname ka Newtoni originaal-formuleeringud:

1. Iga keha säilitab oma oleku kas paigalseisu või ühtlase sirgjoonelise liikumise kujul seni, kuni temale rakenduvad jõud seda olekut ei muuda.
2. Liikumishulga muutus on võrdeline kehale mõjuva jõuga ning toimub samas suunas mõjuva jõuga.
3. Jõud esinevad ainult paari: iga jõuga kaasneb alati niisama suur, kuid vastassuunaline vastumõju.

Jõud, mass, liikumishulk. Jätkame keeleõpet. Jõud ja liikumine on meil juba defineeritud, samuti mõiste "keha". Ära tuleb seletada mass ja liikumishulk.

Mass on keha inertsuse mõõt; ta väljendub vastupanu (liikumis)oleku muutumisele väliste jõudude toimel.

Liikumishulk e. impulss on (liikumis)olekut kirjeldav suurus, mis defineeritakse kui keha massi ja liikumiskiiruse korrutis.

Dünaamika ülesandeks on:

- leida kehade vastasmõjule matemaatiline esitus;
- lahendada saadud diferentsiaalvõrrand

Newtoni seadused tuleb pähe õppida.

NB! Newtoni II ja III seadus käsitlevad jõudu kui vektorit!

Matemaatikast:

Väide "**suurus A** on võrdeline suurusega **B**" tähendab seda, et neist ühe (näiteks **A**) suurendamine mingi arv korda toob endaga kaasa teise (**B**) suurnemise sama arv korda

Nagu näeme, toetuvad mõlemad mõisted samale nähtusele -- kehade inertsus (ld. *inertia* -- loidus, laiskus) kui võimele säilitada oma olek. Staatikas tulenes oleku muutumatus jõudude tasakaalust - nii ka dünaamikas, puudub vaid paigalseisu nõue. Seega on dünaamika seisukohalt tasakaaluolekuks ka ühtlane sirglikumine, paigalseis (kiiruse võrdumine nulliga) on üksnes selle erijuht.

Mida see "mass" endast kujutab, on niisama mõttetu küsimus, kui probleem aja või ruumi olemusest. Newtoni järgi on mass "ainehulga mõõt, mis kujuneb võrdeliselt tiheduse ja ruumalaga". Selle "massi" mõõtmiseks kasutati juba enne Newtonit kehade **kaalumist**, st. aine hulga määramist temale mõjuva raskusjõu abil. Raskusjõud (jõud, millega Maa tõmbab külge tema pinnal olevaid esemeid) on millegipärast võrdeline täpselt sama massiga, mis läheb Newtoni teise (inerti)seadusesse.

Kordan veel kord: **füüsika ei seleta, vaid kirjeldab loodust**. Newtoni seadused, aga ka kõik järgnevas kursuses õpitav, on loodusnähtuste matemaatiline kirjeldus. Selliseid kirjeldusi on ajaloo jooksul tehtud igasuguseid, meie õpime ja kasutame vaid neid, mis on ajaproovile vastu pidanud ja mis annavad kasulikke rakendusi.

Massi ühikuks on **kilogramm (kg)**:

1 kilogramm on ühe kuupdetsimeetri ($10^{-3}m^3$) puhta vee mass temperatuuril $4^{\circ}C$ ja rõhul 1.013 MPa.

Kilogrammi **etalooniks** on platinast silinder, mida hoitakse Rahvusvahelise Kaalude ja Mõõtmiste Büroos Pariisis. Et kaalumise - kaalude võrdlemine - on tehniliselt lihtsasti korraldatav ja väga täpne mõõtmise liik, kasutatakse igapäevaelus ainehulga määrajana just massi.

Jõu ühik rahvusvahelises süsteemis SI on tuletatud Newtoni II seadusest. Seadus ütleb, et kiirendus on **võrdeline** jõuga - seega peaks valemis olema võrdetegur - konstantne kordaja, millega korrutatakse jõu ja massi suhet. Kui valida jõu ühik nii, et võrdetegur oleks võrdne ühega, saaksime lihtsaima valemi. Nii ka toimitakse.

Jõu ühikuks on **njuuton (N)**

1 njuuton on jõud, mis annab ühe kilogrammise massiga kehale kiirenduse üks meeter sekundis sekundi kohta.

Njuutoni **dimensioon** - väljend põhiühikute (meeter, sekund, kilogramm) kaudu on $ms^{-2}kg$ ehk $mkgs^{-2}$.

Mass on aja ja pikkuse (ruumilise ulatuse) kõrval kolmas mehaanika põhisuurus.

Mass on ainus tänapäeval kasutusel olev suurus, mille etalooniks on mitte arvutuseeskiri, vaid reaalne keha.

SI süsteemi ühikud jagunevad

- põhiühikud - siin meeter, sekund, kilogramm
- tuletatud ühikud - siin näiteks njuuton

Tuletatud suuruse **dimensioon** on tema avaldis põhiühikute kaudu.

Jõu ühik - njuuton - on nimetatud klassikalise mehaanika rajaja Isaac Newtoni nime järgi. Reegel on, et selliste ühikute tähis algab suure tähega, nende eestikeelne nimetus aga kirjutatakse vastavalt originaalkeele hääldusele.

Liikumisvõrrand Newtoni mehaanikas. Tuletame meelde: kinemaatikas tähendas liikumisvõrrand keha asukoha (\vec{r}) sõltuvust ajast. Seda sõltuvust võib väljendada ruutpolünoomina

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}}{2} t^2,$$

kus \vec{r}_0 , \vec{v}_0 ja \vec{a} on konstantsed vektorid.

See võrrand kujutab **ühtlaselt muutuvat** (kiirenevat või aeglustuvat) liikumist (kuna kiirendusvektor \vec{a} on konstantne). Newtoni II seaduse kohaselt sõltub kiirendus kehale mõjuvast jõust, mis omakorda võib olla ajas muutuv suurus.

Võrrandist

$$\vec{a} = \frac{1}{m} \vec{F}$$

on näha, et kiirendus on konstantne siis, kui jõud \vec{F} on konstantne. Kui $\vec{F} = \mathbf{0}$, on kiirendus null ja keha liigub ühtlaselt või seisab paigal. Aga just seda väidab Newtoni I seadus: kui teiste kehade mõju puudub või need kompenseeruvad, ongi $\sum \vec{F}_i = \mathbf{0}$.

Mida hakata peale Newtoni III seadusega? Kui uuritakse ainult ühe keha liikumist ja teda mõjutavad kehad meid ei huvita, võime nad vaatluse alt välja jätta. Kui tegu on kehade süsteemiga (aga igasugune mehhanism on tegelikult kehade süsteem) tuleb seadust arvestada.

Kui autoga paigalt võttes anname sidurit vabastades gaasi, rakendame tegelikult Newtoni III seadust: samal ajal, kui siduri üks ketas pöörab käigukasti kaudu auto rattaid, mõjub teisele kettale vastassuunaline (mootori pöörlemist pidurdav) jõud. See tuleb kompenseerida täiendava võimsuse lisamisega (gaasi andmisega), vastasel juhul sureb mootor välja.

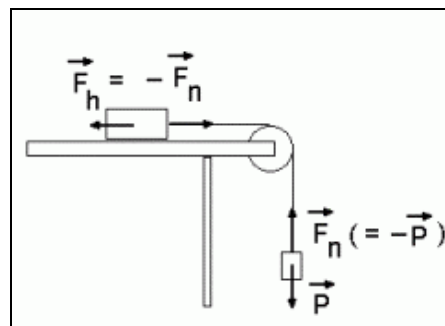
Newton polnud esimene, kes matemaatika abil liikumist uuris. Seda tegid ka vana-aja mehaanikud Heron, Archimedes jt. Liikumise ja selle põhjuste üle murdsid pead Leonardo da Vinci, Galileo Galilei, Evangelista Torricelli, Rene Descartes ja paljud nende kaasaegsed. Newtoni süsteem ületas kõiki neid varasemaid katseid oma universaalsusega, võimalike järelduste ja rakenduste tohtu hulgaga. See, et me teda tänaseni õpime, näitab ainult üht: midagi paremat pole inimkond viimase 300 aasta jooksul välja mõelnud.

Miks? Kohe näeme.

Liikumise diferentsiaalvõrrand. Mida teha aga juhul, kui jõud on muutuv suurus? Esimene mõte: paneme oma liikumisvõrrandispolünoomis kiirenduse \vec{a} asemele $\vec{F}(t)/m$ ja saamegi "muutuva jõuga võrrandi".

Newtoni dünaamikas kasutatavad tähised:

- a. skalaarid:
 - o m - mass.
 - o t - aeg
- b. vektorid:
 - o s - nihe
 - o v - kiirus
 - o a - kiirendus
 - o F - jõud
 - o p - impulss, $=mv$



Newtoni III seadus. Hõõrdejõud on tasakaalus niidi pingega, niidi pinge raskusjõuga.

Liikumisvõrrandi leidmise teeb keeruliseks asjaolu, et uuritavale kehale mõjuv jõud sõltub tavaliselt nii keha asukohast kui kiirusest.

Kui see nii lihtne oleks! Juba käesolevas loengus näeme, et kehade vastasmõju sõltub pigem nende vastastikusest asendist kui ajast.

Kui räägime "muutuvast jõust", ei mõtle me mitte funktsiooni $\vec{F}(t)$, vaid $\vec{F} = f(t, \vec{r}, \vec{v}, \dots)$... Aga liikumisvõrrand nõuab vaid üht - keha asukoha sõltuvust **ajast**.

Siin tulebki appi **diferentsiaalvõrrand**. Kui võtta ajavahemik nii lühike, et jõud "samahästi kui ei muutu", võime liikumise lugeda ühtlaselt muutuvaks. Me võime kasutada Newtoni II seaduse valemite

$$\vec{a} = \frac{1}{m}\vec{F} \implies \vec{r} \equiv \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{1}{m}\vec{F}.$$

See on **teist järku diferentsiaalvõrrand**. Me võime kirjutada ta koordinaate pidi lahti (**tehke seda!**), sööta arvutisse (MathCAD sööb teda hea meelega) ja mõnel lihtsal juhul ka integreerida - viia kujule, mis rahuldab liikumisvõrrandi üldkuju $\vec{r} = f(t)$.

Liikumisvõrrandi lahendeid. Füüsikaülesannetes sageli esinevad jõudude tüübid on loomulikult ammu läbi rehkendatud.

Toome järgnevalt mõned näited sellest, kuidas käitub liikumise diferentsiaalvõrrand meie tuttavate jõudude korral. Vaatame, kas lahendid tulevad tuttavad ette. See, et kasutatakse ühemõõtmelisi liikumisi, ei tohiks teid enam häirida - oletame, et tegu on näiteks kolmemõõtmelise vektorvõrrandi ühe komponendi käitumisega. Teised käituvad samamoodi.

a) Kui jõud on null, on võrrandiks $\ddot{x} = 0$ Integreerides saame:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = 0 \implies \frac{dx}{dt} = v_{0x} = \text{const}$$

$$dx = v_{0x} dt \implies x = \int v_{0x} dt = v_{0x} t + x_0.$$

Jõudude puudumisel või nende summa võrdumisel nulliga liigub keha ühtlaselt (muutumatu kiirusega).

Siin on v_{0x} ja x_0 integreerimiskonstandid; nad võrduvad kiiruse x-komponendi ning keha x-koordinaadi väärtustega ajahetkel $t = 0$

Kui oskate matemaatikat (eksam tehtud?), näidake seda.

b) Kui jõud on konstantne (raskusjõud: $F = mg$, hõõrdejõud: $F = \mu P$), on võrrandi lahendiks meie poolt kinemaatika osas kirjeldatud ning praktikumis proovitud polünoom

$$x = x_0 + v_{0x} t + \frac{a_x}{2} t^2; \quad a_x = \frac{1}{m} F_x.$$

Konstantse jõu korral keha kiirus kasvab või kahaneb ühtlaselt (muutumatu kiirendusega).

Proovige lahendada difvõrrand konstantse nullist erineva jõu puhul, kasutades eelmises punktis esitatud võtteid.

c) Kui jõud sõltub ainuüksi ajast, pannakse polünoomi ruutliikmesse ajast sõltuv kiirendus $a(t) = F(t)/m$.

d) Kui jõud on **võrdeline** nihkega (näiteks elastsusjõud $F = -kx$), või kiirusega (näiteks takistusjõud $F = -bv$) tekib väga huvitav võrrand:

$$\ddot{x} \equiv \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{b\dot{x} + kx}{m},$$

mille üheks lahendiks on sumbuvad võnkumised. Võrrandil on paljudel juhtudel ilus algebralis-trigonomeetriline lahend, numbriliselt (arvutiga) on ta kergesti integreeritav. Matemaatikutel on selliste võrrandite kohta terve teooria.

e) Kui jõud on **pöördvõrdeline** nihke või selle ruuduga (näiteks gravitatsioonijõud $F = \gamma m_1 m_2 / r^2$), tekivad nn. **väljavõrrandid**.

Aga sellest juba järgmises loengus.

Ajast sõltuva jõu korral saame liikumisvõrrandi, kui asendame ühtlaselt muutuva liikumise valemis kiirenduse Newtoni II seadusest. Vt. ülesanded!

Nihkega võrdeline, kuid vastassuunaline jõud kutsub esile võnkumised. Kiirusega vastassuunaline jõud peatab liikumise või viib võnkumiste sumbumisele.