1. ÄMBLIKUVÕRGU MUDEL

Ämblikuvõrgu (*cobweb*-) mudel on mudel, mis kirjeldab pendeldamist tasakaalupunkti ümber. Tavalisteks näideteks on põllumajandustoodangu mudel kõikuva hinna ja toodangukogusega. Hinnakoguseteljel moodustab süsteemi käik nii kokku või lahti keriva spiraali, tollest tuleneb ka mudeli nimi.

1.1Mudel. varudeta

Vaatleme lihtsat mudelit, mille puhul pakutab ja nõutav kogus on alati tasakaalus:

$$\begin{aligned} Q_t^D &= \alpha - \beta P_t \qquad \alpha, \beta > 0 \\ Q_t^S &= -\gamma + \delta P_{t-1} \qquad \gamma, \delta > 0 \\ Q^S &= Q^D. \end{aligned}$$

Esimene võrrand kujutab tavalist langevat nõudluskõverat mis sõltub käesoleva perioodi hinnast. Teine võrrand on tõusev pakkumiskõver, kusjuures pakkumine sõltub eelmise perioodi hinnast. Niisugune olukord esineb näiteks põllumajanduses, kus külveta tuleb mitu kuud enne saagi koristamist. Kolmas on nõue, et kõik pakutav kaup peab saama müüdud. Selline nõue võib olla seotud tollega, et kaup ei seisa (näieks köögivili), või siis tollega, et tootjatel pole ladusid.

Võrrutades esimese ja teise seose saame:

$$\beta P_t + \delta P_{t-1} = \alpha + \gamma.$$

Selle võime omakorda viia „standardkujule"

$$P_{t+1} + \frac{\delta}{\beta} P_t = \frac{\alpha + \gamma}{\beta}.$$

Selle võrrandi lahendiks on

$$P_t = \bar{P} + (P_0 - \bar{P}) \left(-\frac{\delta}{\beta} \right)^t,$$

kusjuures

$$\bar{P} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}.$$

1) Näeme, et tasakaaluliseks hinnaks on $\bar{P}$. Tänu parameetrite algväärtusele on see alati positiivne. Kui $P_0 = \bar{P}$, siis langeb lahendi teine, ajast sõltuv liige hoopis ära.
2) Liige $P_0 - \bar{P}$ näitab kui kaugel tasakaaluasendist oli alghind. Mida suurem oli erinevus, toda suurema amplituudiga kõikumine järgneb.
3) liige $(-\delta/\beta)^t$ näitab hinna arenemist ajas. Kuna eelduste põhjal on astendatav alati negatiivne, siis tekib hinna üles-alla kõikumine. Kõikumine on sumbuv, kui $\delta < \beta$ ja kasvav kui $\delta > \beta$. Erijuhul, kui $\delta = \beta$, võib kõikumine olla püsiva amplituudiga. Stabiilne, ehk siis sumbuva võnkumise lahend,

tekib siis kui pakkumise sõltuvus hinnast on väiksem nõudluse omast. Ehk siis kui toodangu mahtu ei muudeta tänavaasta hinnast sõltuvalt väga palju.

Ämblikuvõrgu mudel on oma nime saanud hinna käigu joonisest. Kanname P-Q teljestikule nõudmis- ja pakkumiskõverad ning alghinna P_0. Alghind määrab läbi pakkumiskõvera esimesel perioodil pakutava koguse Q_1. Pakutav kogus omakorda määrab esimese perioodi hinna P_1 ja nii edasi. Nüüd sõltub nõudmis- ja pakkumiskõvera kalletest, et kas hind koondub $\bar{P}$-ks või hakkab üha rohkem hüplema (püsivat turgu ei tekigi). Olgu öeldud, et niisugune graafiline meetod on kasutatavad ka mittelineaarsete nõudmis- ja pakkumiskõverate puhul.

1.2. Varudega mudel

Vaatame nüüd niisugust mudelit:

$$Q_t^D = \alpha - \beta P_t \qquad \alpha, \beta > 0$$

$$Q_t^S = -\gamma + \delta P_t \qquad \gamma, \delta > 0$$

$$P_{t+1} = P_t - \sigma(Q_t^S - Q_t^D)\sigma > 0$$

Mudeli esimene ja teine võrrand kirjeldavad tavalist nõudmis- ja pakkumisfunktsiooni, pakkumine sõltub nüüd käesoleva perioodi hinnast. Kolmas võrrand kirjeldab hinna kohanemist. Kui eelmisel perioodil varud suurenesid, siis müüjad alandavad hinda, kui vähenesid siis tõstavad hinda. $Q_t^S - Q_t^D$ on nüüd varude kasv.

Kui paneme nõudmis- ja pakkumisfunktsiooni viimasesse võrrandisse saame tavalise esimest järku diferentsvõrrandi:

$$P_{t+1} - [1 - \sigma(\beta + \delta)]P_t = \sigma(\alpha + \gamma).$$

Selle võrrandi lahend on

$$P_t = \bar{P} + (P_0 - \bar{P})[1 - \sigma(\beta + \delta)]^t,$$

kusjuures tasakaaluline lahend avaldub just nagu eelmise mudeli korralgi:

$$\bar{P} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}.$$

See on tegelikult arusaadav tulemus – kuna nõudmis- ja pakkumiskõverad on samasugused nagu eelmine kord, avaldub tasakaalupunkt (nende lõikepunkt) samamoodi. Selle lahendi vaatlemisel näeme:

1) Just nagu eelmine kord, kui $P_0 = \bar{P}$, siis mingit hinnakõikumist ei teki, hind püsib kogu aja ühel tasemel.
2) Samamoodi, mida suurem oli P_0 ja $\bar{P}$ erinevus, toda suurem kõikumine järgneb.
3) Nüüd on tehtud eeldustel astendatav mitte tingimata negatiivne vaid väiksem kui üks. See lisab rohkem arenguvõimalusi. Mida väiksem on σ, toda aeglasem ja ühtlasem areng viib tasakaaluhinnani.

Ämblikuvõrgu mudel ei ole eriti sobiv tegelikkuse kirjeldamiseks. Ta arvestab äärmuslike adaptiivsete ootustega (oodatakse täna sama hinda, mis eile oli). Tegelikult on inimesed märksa õppimisvõimelisemad, nad oskavad näha ka omatänaste otsuste mõju tulevasele hinnale (ratsionaalsed ootused) ja vaadata ajas kaugemale tagasi kui ainult eelmist perioodi (lihtsalt adaptiivsed ootused).

2. KAHE MUUTUJA FAASIDIAGRAMMID

Faasidiagrammid on tõhus meetod millega saab kvalitatiivselt uurida kahe-muutuja võrrandisüsteemide käitumist. Faasidiagrammid ei võimalda leida võrrandisüsteemi kvantitatiivset käiku – arvulisi lahendeid, kuid see-eest on sellel meetodil võimalik käsitleda ühtemoodi nii lineaarseid kui ka mittelineaarseid süsteeme. Faasidiagrammide meetodil saab aga kirjeldada vaid ühte tüüpi – nn. autonoomseid süsteeme. Niisugused süsteemid võib avaldada kujul:

$$\dot{x}(t) = f(x, y)$$

$$\dot{y}(t) = g(x, y)$$

Seega ei tohi avaldised $\dot{x}$ ja $\dot{y}$ jaoks aega sisaldada.

Faasidiagrammid ei võimalda võrrandeid lahendada tavalises mõttes. Nad võimaldavad selgitada

- lahendite olemasolu
- lahendite stabiilsuse või ebastabiilsuse
- süsteemi ajalist käiku:
  - ühtlane lähenemine stabiilsele lahendile
  - ühtlane kaugenemine stabiilsest lahendist
  - lähenev või kaugenev liikumine stabiilse lahendi ümber

2.1. Kuidas faasidiagramme joonistada

Faasidiagramm joonistatakse kahemõõtmelisel juhul $x - y$ teljestikule. Esimese sammuna tuleb diagrammile kanda **eraldusjooned**(*demarcation curves*) – $\dot{x} = 0$ ja $\dot{y} = 0$ jooned. Selleks tuleb eelneb võrrandisüsteem lahendada $\dot{x} = 0$ ja $\dot{y} = 0$ suhtes:

$$f(x, y) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = x(y)$$

$$g(x, y) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = x(y).$$

Seega saame kaks seost x ja y vahel, esimene neist vastab tingimusele $\dot{x} = 0$ ja teine tingimusele $\dot{y} = 0$. Mõlemad niisugused seosed kujutavad mingit joont $x - y$ teljestikus.

Võib juhtuda, et ilmutatult ei ole võimalik seoseid x ja y vahel esitada. $\dot{x} = 0$ ja $\dot{y} = 0$ jooned on aga (kvalitatiivselt) ikkagi leitavad. Seosest $f(x, y) = 0$ saame $df(x, y) = 0 \Rightarrow f_x dx + f_y dy = 0 \Rightarrow$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y}.$$

Viimane seos kujutab sama joone, joone kus $\dot{x} = 0$ avaldist diferentsiaalkujul, dy/dx on joone tõus. Soovides joont täpselt välja arvutada, peaksime teadma mingit joone punkti $(x_0; y_0)$. Tollest punktist võime siis saadud diferentsiaalavaldist integreerida ja saada seose kujul $y = y(x)$.

Kuna faasidiagrammide meetodit kasutatakse vaid lahendi kvalitatiivsel uurimisel, ei ole $\dot{x} = 0$ joone täpne leidmine enamasti oluline. Piisab, kui me teame joone kallet ja toda, kas tõusev joon muutub kusagil langevaks või vastupidi. Seega on faasidiagrammi joonistamiseks piisav, kui teame avaldise $-f_x/f_y$ märki, ehk siis vastavate tuletiste märke.

Loomulikult tuleb kõike siin öeldut silmas pidada ka funktsiooni $\dot{y} = g(x, y)$ puhul.

Oletame nüüd selguse mõttes, et $f_x < 0$; $f_y > 0$; $g_x > 0$ ja $g_y < 0$. Seega on nii $\dot{x} = 0$ kui ka $\dot{y} = 0$ tõusvad kõverad. Oletame veel et $-f_x/f_y > -g_x/g_y$ ehk siis $\dot{x} = 0$ joon tõuseb kiiremini.

Oletame et eraldusjooned lõikuvad mingis punktis E. Üldiselt, keerulisema eraldusjoone kuju korral võib lõikepunkti olla mitu. Et kumbki eraldusjoon on kohaks faasidiagrammil, kus vastav muutuja ajas ei muutu, vastavalt kas $\dot{x} = 0$ või $\dot{y} = 0$, siis nende lõikepunkt on kohaks, kus ei x ega y ei muutu. Sääl kehtivad mõlemad tingimused korraga ja seega jäävad mõlemad muutujad püsivaks. See on süsteemi üks pikaajaline lahend. Pikaajaline lahend on stabiilne kui süsteem ka tasakaalupunktist E veidi kaugemalt ise tasakaalu liigub. Ebastabiilse süsteemi korral piisab väikesest hälbest tasakaalupunktist välja, et süsteem läheks tollest edasi ise üha kaugemale.

Vaatleme näiteks eraldusjoont $\dot{x} = 0$. Sellel joonel meie eeldusel

$$d\frac{\dot{x}}{dx} = \frac{df(x, y)}{dx} = f_x < 0.$$

Niisugune tuletis näitab, et eraldusjoon on stabiilne x-suunaliste häirete suhtes. Tõepoolest, kui süsteem mingil põhjusel liigub $\dot{x} = 0$ joonelt suurema x suunas (paremale), siis kuna nüüd $\dot{x} < 0$, hakkab x kahanema ja süsteem nihkub tagasi eraldusjoonele (vasakule). Süsteemi niisugust käitumist on faasidiagrammil tavaks tähistada vasakule suunatud faasinoolekestega eraldusjoonest $\dot{x} = 0$ paremal ja paremale suunatud noolekestega vasakul.

Niisugune tulemus üksi ei tähenda, et süsteem tervikuna oleks stabiilne. Eraldusjoon $\dot{x} = 0$ tähendab üksnes toda, et x ei muutu. y võib aga muutuda kuidas iganes. Vaatlememe analoogiliselt ka teist eraldusjoont $\dot{y} = 0$. Meie eeldusel

$$d\frac{\dot{y}}{dy} = \frac{dg(x, y)}{dy} = g_y < 0.$$

Seega, kui süsteem satub eraldusjoonest suurema y suunas (üles), hakkab y iseenesest ajas kahanema (alla liikuma). Seda võime tähistada alla suunatud faasinoolekestega eraldusjoonest üleval ja üles suunatutega allpool.

Mõlemad eraldusjooned jagavad faasidiagrammi neljaks sektoriks. Joonistame vastavad noolekesed igasse diagrammi osasse. Need noolekesed näitavad, kuhu suunas süsteem diagrammil vastavas sektoris arenema hakkab. Nii võime noolekesi järgides diagrammile lisada süsteemi arengunooli (*phase path*). Arengunooled järgivad faasinoolekesi. Lisaks tuleb nende joonistamisel silmas pidada, et lõikudes $\dot{x} = 0$ eraldusjoonega ei muutu x (arengunool on risti x-teljega) ja lõikudes $\dot{y} = 0$-ga ei muutu y (arengunool on rõhtne). Et seda diagrammi joonistamisel arvesse võtta, on kaval, kui eraldusjoontele teha väikesed püst- ($\dot{x} = 0$) või rõhtkriipsukesed ($\dot{y} = 0$). Arengunooled võivad eraldusjoontega lõikuda.

Kuna võrrandisüsteemil on lahendid iga x_0 ja y_0 korral, siis leidub iga punkti jaoks faasidiagrammil teda läbiv arengunool. Ja kuna kindlas algolekus süsteem areneb alati ühel viisil, siis läbib igat faasidiagrammi punkti ainult üks nool. Tavaliselt piisab kvalitatiivse pildi saamiseks vaid mõnest arengunoolest. Meie näite korral viivad kõik arengunooled punkti E suunas. Seega on E võrrandisüsteemi stabiilne lahend.

Selline faasidiagramm ei sisalda informatsiooni arengukiiruse kohta. Normaalsete pidevate ja siledate funktsioonide korral kehtib niisugune reegel, et pikaajalise lahendi lähedal on kõik liikumised aeglased, tollest kaugenedes muutuvad nad kiiremaks.

2.2. Erinevad pikaajalised lahendid

Sõltuvalt faasinoolekeste ja eraldusjoonte asendist võivad pikaajalised lahendid olla kolme põhimõtteliselt erinevat tüüpi:

- Stabiilsed ja ebastabiilsed **sõlmed**. Need on lahendid, kus kõik arengunooled viivad sõlme suunas või säält eemale. Eelmises näites oli tegu stabiilse sõlmega.
- **Sadulpunkt**. See on lahend, kus osad arengujooned algul lähenevad tasakaalupunktile, hakkavad siis aga kaugenema. Mõned jooned kaugenevad kohe algusest pääle. Leidub aga kaks joont (*saddle path*), teine teisel pool tasakaalu, mis tasakaaluni viivad. Oma nime on lahend saanud sarnasusest sadulaga – samamoodi liiguks kuulike, kui teda sadula pinnal veeretada. Sadulpunkt on ebastabiilne.
- Stabiilsed ja ebastabiilsed **fookused**. Fookus on lahend, millele süsteem näib spiraalitades lähenevat (stabiilne), või millest spiraalitades kaugenevat (ebastabiilne). Fookuse erijuht on **vorteks**, see on kui süsteem keerutab ümber tasakaalu tollele lähenemata või eemaldumata.

Kõik seda tüüpi võrrandite lahendid on kirjeldatava nende lahenditüüpidega. Enamasti huvitabki meid süsteemi käitumine tasakaalupunkti lähedal, seega tegeldakse faasidiagrammidel sageli just tasakaalupunktide tüüpide uurimisega. Ka keeruliste faasijoonte lähiümbrus on alati selliste lahenditega kirjeldatav, juhul kui vaid funktsioonid f ja g on normaalsed, s.t. pidevad ja siledad ja kui eraldusjooned lõikuvad.

Niisugused normaalsed funktsioonid võib tasakaalupunkti lähedal alati lineariseerida, s.t. leida lineaarne difvõrrandisüsteem, mis tasakaalupunktile piisavalt lähedal annab piisavalt täpseid tulemusi. Lineaarse funktsiooni korral on eraldusjooned sirged. Seega, uurides süsteemi liikumist tasakaalu lähedal, tuleb eraldusjooned ka enam-vähem sirged joonistada. Ka süsteemi arengunooled peavad olema enam-vähem ühtlaselt kõverad või sirged, tasakaalu piisavalt väikeses ümbruses ei tee süsteem mingeid ootamatuid hüppeid ja kõverusi. See kehtib muidugi ainult siis, kui uurida süsteemi käitumist tasakaalupunkti läheduses. Kui uurime faasidiagrammi laiemalt, näiteks kui süsteemil on mitu tasakaalu ja meid huvitab süsteemi tee ühest teise, siis ei saa eraldusjooni enam sirgena joonistada.