Loeng 14. Mehaanilised ja elektrivõnked.

Perioodiline liikumine.

Perioodiliseks liikumiseks (protsessiks) nimetame sellist liikumist, mis kordub teatud kindla ajavahemiku - perioodi - järel. Igapäevaelus kipume nimetama perioodiliseks igasuguseid korduvaid nähtusi (aastaajad, bussiliiklus, palgapäevad); füüsikas loeme protsessi perioodiliseks vaid siis, kui kehtib matemaatiline seos

$$A = f(t) = f(t+T) = f(t+nT),$$

kus muutuja t tähistab aega, konstant T *perioodiks* nimetatavat ajavahemikku, n nagu tavaliselt, täisarvu. Definitsioon langeb täielikult ühte matemaatika perioodiliste funktsioonide omaga; füüsikas peab **argumendiks olema aeg**. (Muidu poleks tegu *protsessiga*.)

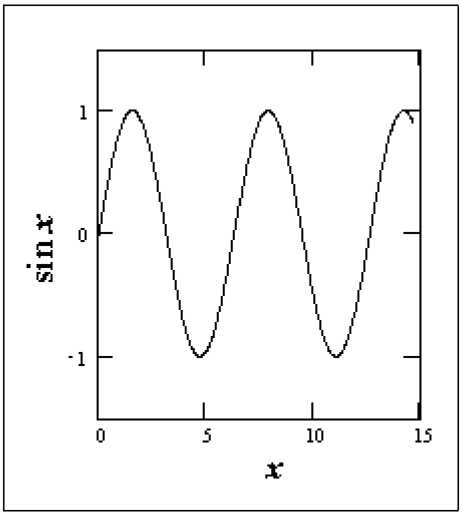
Perioodiliseks protsessiks nimetatakse protsessi, mis mis kordub kõigis üksikasjades teatud ajavahemiku (perioodi) järel.

Perioodilistest **liikumistest** tunneme seni *pöörlemist*, täpsemalt *ühtlast pöörlemist*. Kui pöörlemine on kiirenev või aeglustuv, pole meil võimalik näidata konstantset perioodi, ehkki liikumine ajas kordub. Nagu näeme, on perioodiline liikumine mõnes mõttes ühtlase sirgliikumise analoog - viimase fundamentaalset tähtsust rõhutas Newton oma esimeses seaduses.

Perioodilise liikumise lihtsaimad näited on ühtlane pöörlemine ja harmooniline võnkumine (SHM).

Lainefüüsikat õppides näeme, et niisama fundamentaalne on ka nn. **harmooniline liikumine** (ingl. *Simple Harmonic Motion*, lühendina SHM) - võnkumine, mille periood ei sõltu mingitest välistest teguritest. Väga paljud nähtused on hästi kirjeldatavad konstantse perioodiga võnkumiste abil. Sõna "harmooniline" pärineb ise muusikast, mis oli vanasti üks füüsika osi. Muusikas tähendab harmoonia helide tonaalsuste sobivust - nagu selgub, on seegi kirjeldatav püsiva sagedusega võnkumiste abil.

Loodus pakub meile tohutult näiteid võnkuvate kehade või süsteemide kohta. Iga keha (süsteem), mis on **püsivas tasakaalus**, hakkab pärast tasakaalust välja viimist võnkuma. Need pole küll ilmtingimata harmoonilised võnked, kuid peaaegu alati on olemas kindel sagedus, mis sõltub võnkumisvõimelise süsteemi parameetritest. Ja nagu tavaliselt, võime konstrueerida protsessi (süsteemi) idealiseeritud mudeli, mis liigub täpselt harmoonilise võnkumise seaduse järgi ning kus kogu "mitteharmoonilisus" viiakse muutuvatesse parameetritesse.



Siinusvõnked ***x=sin(t)*** kui harmoonilise liikumise näide.

Kehade (süsteemi) tasakaalu tingimused.

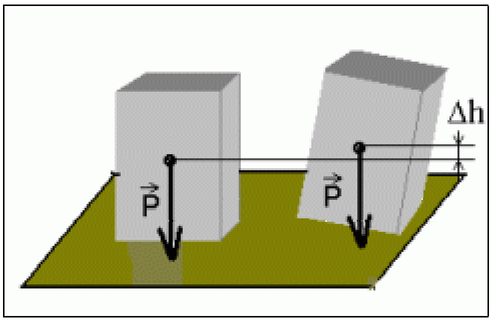
Dünaamikas tähendab tasakaal seda, et **keha ei muuda oma olekut**. Newtoni seaduste järgi tähendab see jõudude puudumist (või nende vastastikust kompenseerumist). Matemaatiliselt väljendab seda kehale mõjuvate jõudude ning jõumomentide algebralise (vektor-) summa võrdumine nulliga:

$$\sum \vec{F}_i = \sum \vec{M}_i = 0.$$

Tasakaaluasendis on kehale mõjuvate jõudude, samuti jõumomentide algebraline summa null.

Tasakaalus oleva keha jaoks on alati olemas inertsiaalsüsteem, milles selle keha masskese on paigal. Keha ise võib seejuures pöörelda konstantse nurkkiirusega (ühtlane pöörlemine).

Sama kehtib kehade **süsteemi** kohta. Sellisel juhul on nõutav **kõigile** kehadele mõjuvate resultantjõudude (jõumomentide) võrdumine nulliga.



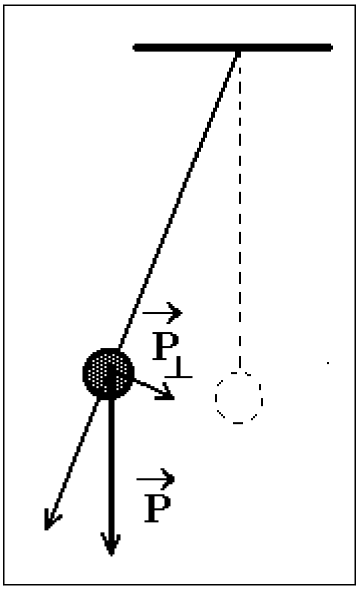
Tikutoos laual: et toos külili kukuks, tuleb ta kõigepealt serva peale keerata. Kuna sel ajal raskuskese tõuseb, suureneb ka potentsiaalne energia.

Need definitsioonid, ehkki absoluutsed, ei ütle midagi tasakaalu **püsivuse** kohta. Ometi teame, et seinale riputatud vikat on tunduvalt ohutum seina najale pandud vikatist - viimane võib juba kergest tõukest alla kukkuda. Selle kohta annab koolifüüsika reegli: keha on püsivas tasakaalus, kui tema raskuskese asub allpool toetuspunkti. Päris õige see pole, kuna enamus Maa raskusjõu väljas olevaid kehasid (näiteks lauale pandud tikutoos) püsib hästi paigal vaatamata sellele, et masskese on toetuspinnast kõrgemal.

Teoreetilises mehaanikas lahendatakse tasakaalu küsimus energia abil. Konservatiivsete jõudude korral väljendab seda **potentsiaalse energia miinimumi lause**:

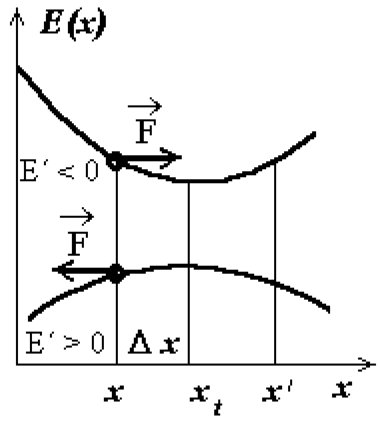
Keha on püsivas tasakaalus, kui tema potentsiaalne energia on minimaalne

Niisiis: tasakaal on püsiv juhul, kui keha liigutamiseks tasakaaluasendist tuleb teha tööd - suurendada energiat. Energia kohta kehtib võrdus $A = -\Delta E$ - kui süsteem teeb tööd, peab tema energia vähenema ja vastupidi, et energia suureneks, peab tehtama tööd süsteemi jõudude vastu. Töö valemist $A = \vec{F} \cdot \vec{\Delta s}$ näeme, et viimasel juhul peab kahe vektori skalaarkorrutis olema negatiivne, st **vektorid** $\vec{F}$ **ja** $\vec{\Delta s}$ **peavad olema vastassuunalised**.

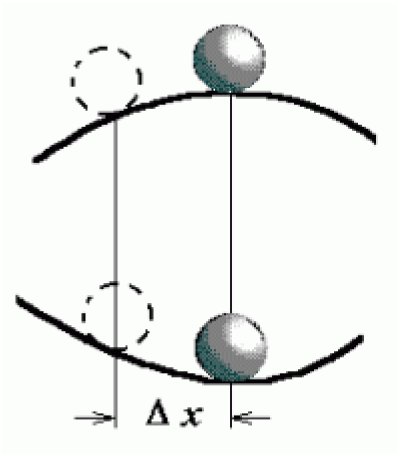


Direktsioonijõu teke: tasakaalust välja viidud pendlikuulile mõjuva raskusjõu $\vec{P}$ komponent $\vec{P}_\perp$ on suunatud tasakaaluasendi poole.

Jõudsimegi võnkumiste fundamentaalse seaduseni: selleks, et tasakaal oleks püsiv, peab keha väljaviimisel tasakaaluasendist tekkima jõud, mis püüab viia keha tagasi tasakaaluasendisse. Seda jõudu nimetatakse **direktsioonijõuks**. Direktsioonijõu olemasolu on võnkumiste tekke hädavajalik tingimus.



Potentsiaalikõverad: püsiv tasakaal (ülemine kõver) ja ebapüsiv tasakaal (alumine kõver). Jõu suund sõltub tuletise märgist.



Pall mäe otsas ja oru põhjas. Kaugusele Δx nihutatud pall veereb esimesel juhul tasakaaluasendist eemale, teisel juhul tagasi oru põhja.

Ühemõõtmelise liikumise korral saab toodut illustreerida graafiliselt teljestikus "potentsiaalne energia - asukoht (ruumikoordinaat)". Joonisel toodud kõveratest vastab ülemine püsivale, alumine aga ebapüsivale tasakaalule. Näeme, et keha nihutamisel tasakaaluasendist x_t eemale ülemisel graafikul potentsiaalne energia suureneb. Tekkiv jõud $\vec{F} = -dE/d\vec{x}$ on suunatud tasakaaluasendi poole, tema suurus ning sõltuvus kaugusest tasakaaluasendini $\Delta x = x - x_t$ olenevad funktsiooni $E = f(x)$ omadustest (potentsiaalikõvera kujust). Alumisel kõveral kutsub aga vähimgi eemaldumine tasakaalupunktist esile jõu, mis sunnib keha sealt lõplikult lahkuma

Kui kehale rohkem jõudusid ei mõju, tähendab energia kasvatamine nihkel $x_t \longrightarrow x$ keha (süsteemi) **koguenergia** kasvu tasemeni E_x. Sellise energiaga keha võib vabalt liikuda ruumipunktide x ja x' vahelises piirkonnas, kusjuures tema kineetiline energia mingis punktis x_i vastab energiate vahele $E(x) - E(x_i)$. Meie (ühemõõtmelisel) juhul on ainus võimalik liikumistüüp **võnkumine** punktide x ja x' vahel.

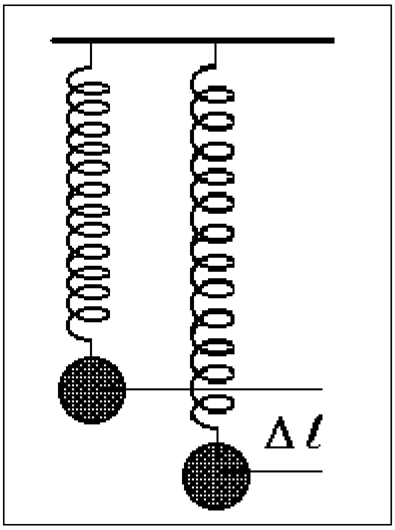
Vabavõnked ja harmoonilised võnked.

Süsteemi vabavõngeteks nimetame liikumisi, mis toimuvad tasakaaluasendist väljaviimisel tekkiva **direktsioonijõu** mõjul. Direktsioonijõud on suunatud tasakaaluasendi poole ja sõltub võnkuva keha kaugusest tasakaaluasendist - nn **hälbest**. Kui direktsioonijõud on võrdeline hälbega, tekib lihtsaim võnkumistest **- siinusvõnked**.

Harmooniline liikumine (siinusvõnked) tekib siis, kui direktsioonijõud on võrdeline hälbega.

Vaatleme näiteks vedru otsa riputatud raskust. Oletame, et raskusele massiga m mõjub raskusjõud P, mille tasakaalustab vedru elastsusjõud F_0. Kui vedru viiakse tasakaaluasendist välja, venitades teda pikkuse l võrra, suureneb elastsusjõud väärtuse $F(l) = -kl$ võrra. Et enne venitamist olid jõud tasakaalus, väljendab see juurdekasv raskusele mõjuvat jõudu, kutsudes esile kiirenduse $a = \frac{F}{m} = -\frac{k}{m}l$. Arvestades, et $a = \frac{d^2l}{dt^2}$, saame liikumisvõrrandiks

$$\frac{d^2l}{dt^2} = -\frac{k}{m}l.$$

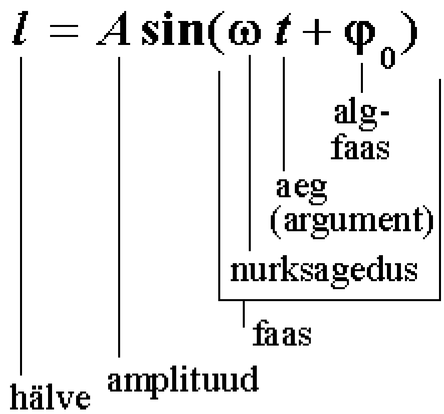


Vedrupendel. Direktsioonijõuks on elestsusjõud, mis Hooke'i seaduse järgi on võrdeline ja vastassuunaline deformatsiooni, st. hälbega (kaugusega tasakaaluasendist).

Lihtsa proovimisega saab näidata, et seda võrrandit rahuldavad funktsioonid $\sin at$ ning $\cos at$ juhul, kui $a^2 = k/m$. Peale selle "lihtsa" lahendi kõlbavad kõik funktsioonid

$$l = A\sin(\omega t + \varphi_0).$$

See ongi *harmooniliste võngete* võrrand.



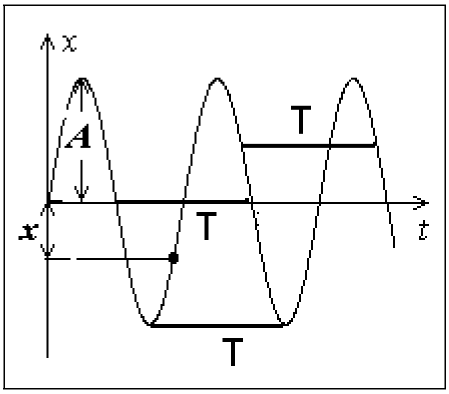
Harmooniliste võngete võrrand ja selle elemendid.

Võnkumist iseloomustavad suurused.
Võnkumiste konstandid - parameetrid, mis ajas ei muutu:
- suurust A, mis väljendab võnkuva keha maksimaalset kõrvalekallet tasakaaluasendist, nimetatakse **amplituudiks**.
- aja t kordajat ω nimetetakse **võnkumise nurksageduseks**.
- liidetavat φ_0 nimetatakse **algfaasiks**.

Ajas muutuvad suurused:

- l -- **hälve** (kaugus tasakaaluasendist hetkel t)
- siinuse argumenti $(\omega t + \varphi_0)$ nimetame **faasiks**.

Algfaas on seega võnkuva keha faas hetkel $t = 0$, amplituud aga maksimaalne hälve.



Harmooniliste võnkumiste graafik. Lõik **T** väljendab (võnke)perioodi.

Seda, et tegemist on perioodilise liikumisega, järeldame siinusfunktsiooni (või koosinuse) perioodilisusest. Et nende funktsioonide periood on 2π, tuleb *võnkeperioodiks* faas 2π:

$$A\sin(\omega t + \varphi_0) = A\sin[2\pi + (\omega t + \varphi_0)].$$

Seega on *ajaline periood*:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Tihti avaldatakse hoopis ω perioodi kaudu: $\omega = 2\pi/T$.

Võnkeperioodi pöördväärtust $\nu = 1/T = \omega/2\pi$ nim. **võnkesageduseks**.

Nüüd peaks kõik olema. Nende suurustega kirjeldatakse füüsikas harmoonilisi võnkumisi.

Faasidiagramm ja võnkumiste liitmine

Võnkumiste liitmist vajame siis, kui üks ja seesama keha võtab osa mitmest sõltumatust võnkumisest. Et leida summaarse liikumise valemit, peame need võnkumised liitma.

Keha võib samaaegselt osaleda kuitahes mitmes võnkumises. Koguliikumise saame, kui liidame kõik need võnkumised, arvestades liikumissuunda.

Lihtne harmooniline võnkumine on **ühesuunaline**. Seetõttu võisime teda kirjeldada ühedimensionaalse liikumisena. Kui keha osaleb kahes võnkumises, ei tarvitse nende suunad ühte langeda - seetõttu peame nad kirjeldama **vektoritena**.

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \vec{a}_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Samal kombel liidame vektoritena ka kolm või rohkem võnkumist. Loomulikult võime kasutada koordinaatmeetodit, liites vektorite asemel nende komponente. Seetõttu taandub võnkumiste liitmine *suundade järgi* kahele põhijuhule: samasihiliste ja ristuvate võnkumiste liitmisele.

A. Samasihilised võnkumised.

1. $\omega_1 = \omega_2 = \omega; \quad \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi; \quad a_1 \neq a_2$

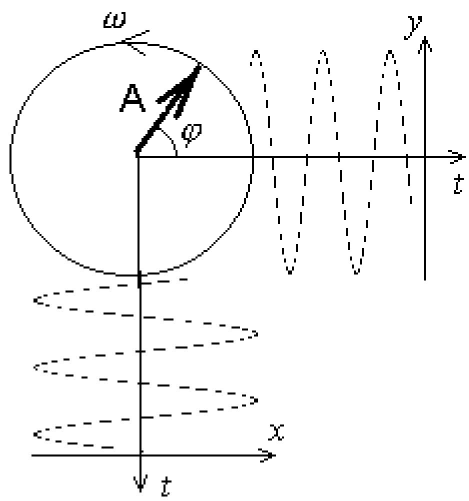
Toimub summaarse amplituudiga võnkumine:

$$l = (a_1 + a_2)\sin(\omega t + \varphi)$$

2. $\omega_1 = \omega_2 = \omega; \quad \varphi_1 \neq \varphi_2; \quad a_1 \neq a_2$

Kui amplituudid on võrdsed, saame hakkama trigonomeetria valemite abil (kuidas?). Kui mitte, kasutame **faasidiagrammi**.

Mis see on? Iga harmoonilist võnkumist saab kujutada pöörlemisena. Selleks joonistame vektori pikkusega (mooduliga!) A ning vaatame, kuidas muutub tema y-koordinaat juhul, kui vektor pöörleb ühtlase nurkkiirusega ω oma alguspunkti ümber.



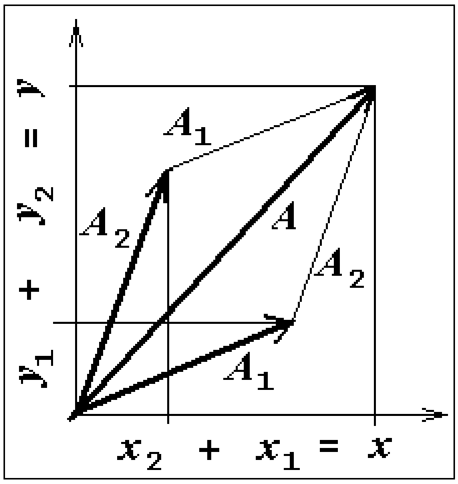
Faasidiagramm (*Phasor*).
Ümber koordinaatide alguspunkti pöörleva vektori ***x***- ja ***y***-komponendid muutuvad harmoonilise liikumise valemi kohaselt.

Lihtsaimal juhul, kui vektor algab koordinaatide alguspunktist $x = y = 0$, saame

$$y = A \sin(\omega t + \varphi_0),$$

kus φ_0 on meie vektori A nurk x-teljega hetkel $t = 0$.

Aga see ongi ju harmooniliste võnkumiste võrrand. Võnkumise graafilist kujutamist pöörleva vektorina nimetatakse **faasidiagrammiks** (ingl. *phasor*) ning see annab meile hea võimaluse asendada küllaltki keeruline valemite liitmine märksa piltlikuma vektorite liitmisega.



Phasor'ite liitmine. Võime kasutada nii koordinaatmeetodit kui rööpkülikureeglit.

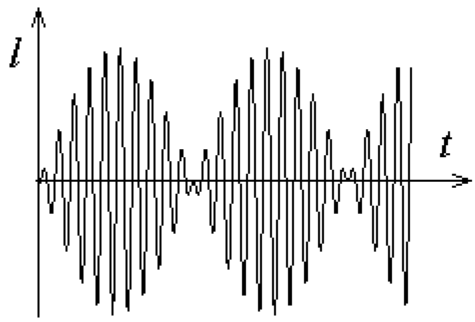
Joonistame kaks ühest punktist lähtuvat vektorit, millede moodulid on A_1 ja A_2 ning nurgad x-teljega vastavalt φ_1 ja φ_2. Et neid võnkumisi liita, tuleb liita faasidiagrammid (milline kohmakas väljend *phasor*iga võrreldes!). Liitnud vektorid rööpkülikureegli abil, näeme, et summaarse võnkumise amplituud ja algfaas erinevad lähtevõnkumiste omast. Lahutame liidetavad komponentideks, liidame need ja saame tingimused, mis määravad otsitavad suurused:

$$\tan\varphi = \frac{a_1 \sin\varphi_1 + a_2 \sin\varphi_2}{a_1 \cos\varphi_1 + a_2 \cos\varphi_2};$$

$$a^2 = (a_1 \sin\varphi_1 + a_2 \sin\varphi_2)^2 + (a_1 \cos\varphi_1 + a_2 \cos\varphi_2)^2.$$

Pärast trigonomeetrilisi teisendusi saame

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2):$$



Tuiklemine.
Liitvõnkumise amplituud muutub harmoonilise liikumise seduse kohaselt.

See, koosinuslauset meenutav valem kannab nime **amplituudide reegel** ja on **lainefüüsika kõige tähtsam valem**.

3. $\omega_1 \neq \omega_2; \quad \varphi_1 = \varphi_2 = 0; \quad a_1 = a_2$

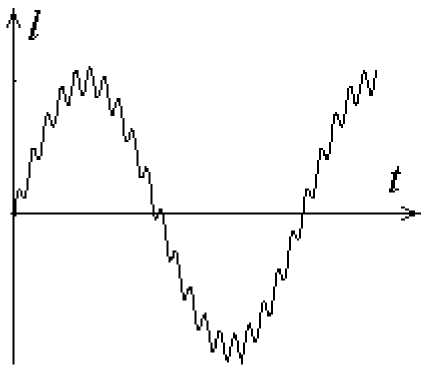
Võtsime esialgu amplituudid võrdseks, et kasutada trigonomeetriat. Saame:

$$l = a(\sin\omega_1 t + \sin\omega_2 t)$$

$$= 2a \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t$$
$$= \left[2a \cos \frac{\Delta\omega}{2} t\right] \sin(\omega_1 + \frac{\Delta\omega}{2} t).$$

Nurksulgudes olevat avaldist võime vaadelda kui **ajas muutuvat amplituudi**.
Kui $\Delta\omega << \omega_1$, saame nn. **tuiklemise**, kus võnkumine toimub peaaegu vana sagedusega, amplituud aga kõigub sagedusega $\Delta\omega/2$.
Lihtne on ka siis, kui sagedused väga kõvasti erinevad - siis toimub ühe (väikese sagedusega) võnkumise taustal kiire (suurema sagedusega) virvendus.
Kõige keerulisem on muidugi suvaliste sageduste juhtum - siis ei jää tõesti üle midagi muud, kui liita valemid.

Ülalöeldu kõlbab ka siis, kui amplituudid ei ole võrdsed. Pilt jääb (peaaegu) samaks, ainult et minimaalne amplituud pole enam null, vaid komponentide amplituudide vahe.

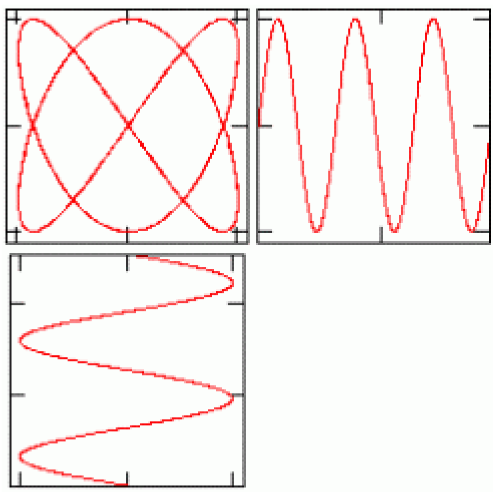


Virvendus.
Kiire "värin" aeglasema võnkumise taustal.

Küsimus: Et kirjeldatud liikumised pole harmoonilised, on selge. Aga kas nad on **perioodilised**? Kui jah, siis milline on periood?

B. Ristsuunalised võnkumised. Kui liidame kaks harmoonilist võnkumist, saame **tasandilise kõvera**, mis sõltuvalt komponentide sagedustest võib olla *suletud kõver*, kui sageduste suhe on ratsionaalarv ning *lahtine kõver*, kui suhe on irratsionaalne (vähemalt üks komponentidest on irratsionaalarv).

Neist esimese kuju sõltub komponentide sagedustest ja faasivahest; teda nimetatakse *Lissajous' kujundiks*, mille lihtsamad variandid on hästi uuritud. Kõik summaarsed kõverad mahuvad ristkülikusse mõõdetega $2a_1 \times 2a_2$; lahtine kõver täidab pikapeale kogu selle pindala.



Lissajous' kujund perioodide suhtega 2:3 -- komponendid ja summa.

Kui on tegemist kolme omavahel ristuva võnkumisega, tekib ruumiline kõver risttahukas $a_1 \times a_2 \times a_3$. Põhimõtteliselt võib seegi olla kinnine või lahtine joon.

Missugune kujund tekib aga nelja või rohkema võnkumise liitmisel?

Võnkumiste energia. Et võnkuv keha on liikumises, saame arvutada tema kiiruse ja kiirenduse, diferentseerides võnkumiste võrrandit aja järgi. Nii saame:

$$v = \frac{dl}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0) = A\omega\sin(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2})$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2l}{dt^2} = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi_0) = A\omega^2\sin(\omega t + \varphi_0 + \pi).$$

Näeme, et kiirus ja kiirendus muutuvad sama seaduspärasuse järgi, ennetades hälvet faasis vastavalt veerand perioodi ($\pi/2$) ning poole perioodi (π) võrra. Seega on võnkuva keha kiirus maksimaalne hetkel, kui hälve on null, kiirendus aga maksimaalse hälbe momendil.

Keha **energia** leiame kineetilise ja potentsiaalse energia summana. Meie näites on potentsiaalseks energiaks elastsusjõu energia $E_p = kl^2/2$ ning

$$E = E_k + E_p = \frac{mv^2}{2} + \frac{kl^2}{2} = mA^2\omega^2\cos^2\varphi + kA^2\sin^2\varphi,$$

$\varphi = (\omega t + \varphi_0)$ on faas.

Arvestades, et $\omega^2 = k/m$, saame

$$E = \frac{mA^2\omega^2}{2}(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \frac{mA^2\omega^2}{2}.$$

Võnkuva keha energia on võrdeline

- keha massiga;
- amplituudi ruuduga;
- sageduse ruuduga.

Sama tulemuse saame, leides kineetilise või potentsiaalse energia maksimaalväärtuse vastavalt tasakaaluasendis ning maksimaalse hälbe momendil.

Seega toimub võnkumise ajal pidevalt kineetilise energia üleminek potentsiaalseks ja vastupidi. Koguenergia seejuures ei muutu; seepärast nimetatakse harmoonilisi võnkeid ka **sumbumatuteks võnkumisteks**.

Et tegelikkuses toimub alati energiakadu hõõrdumise või õhutakistuse tõttu, on vabavõnked idealisatsioon. Harmooniliste võnkumiste näiteks on lisaks võnkumistele elastsusjõu mõjul veel vedeliku võnked U -torus, kuulikese veeremine paraboolsel pinnal ning (ligikaudselt!) ka pendli väikese amplituudiga võnked.

Sumbuvvõnked.

Takistav jõud. Et kirjeldada reaalseid võnkeprotsesse, tuleb liikumisvõrrandisse viia liige, mis väljendaks võnkumist takistavat jõudu. Selle liikme kirjapanekul arvestame, et

Kui võnkumiste energia kahaneb, tekivad **sumbuvvõnked**.

a. takistav jõud mõjub ainult liikuvale kehale;
b. jõud *takistab liikumist*, st. mõjub liikumise vastassuunas;
c. jõud on *dissipatiivne*, st. vähendab süsteemi energiat.

Meie poolt õpitutest kõlbavad seega hõõrde- ja takistusjõud. Matemaatiliselt lihtsam on kasutada väikestel kiirustel kehtivat **keskkonnatakistust** (sisehõõrdejõudu):

$$\vec{F}_t = -b\vec{v},$$

kus b on *takistustegur* ja v võnkuva keha kiirus.
Lisades selle vabavõngete võrrandile, saame:

$$\vec{a} = \frac{1}{m}(\vec{F}_e + \vec{F}_t) = -\frac{k\vec{l}}{m} - \frac{b\vec{v}}{m}$$

Asendades kiiruse ja kiirenduse tuletistega ning viies nad teisele poole võrdusmärki, saamegi **sumbuvvõngete võrrandi**:

$$\ddot{l} + \frac{b}{m}\dot{l} + \frac{k}{m}l = 0.$$

Takistavas keskkonnas on võnkuva keha liikumisvõrrandiks

- lineaarne
- homogeenne
- II järku

diferentsiaalvõrrand.

Matemaatikute jaoks on see *lineaarne homogeenne II järku diferentsiaalvõrrand*, mille lahendi saab avaldada sama astme polünoomi, nn. *karakteristliku võrrandi*

$$\lambda^2 + \frac{b}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$$

juurte

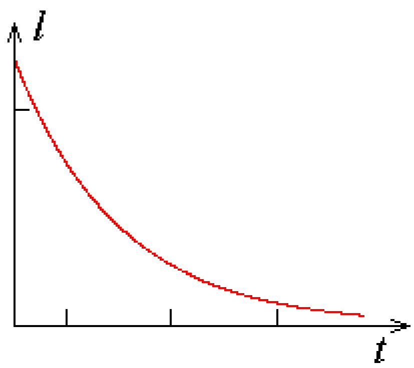
$$\lambda_{1,2} = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

kaudu.
Diferentsiaalvõrrandi lahendi tüüp sõltub nüüd juurte tüübist:

- Kui need on **reaalarvud** (st. ruutjuure alune avaldis on positiivne), on otsitavaks funktsiooniks (üldlahendiks) eksponentfunktsioon:

  $$l = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t},$$

  millele vastab hääbuv liikumine.



Hääbuv liikumine:
kaugus tasakaaluasendist kahaneb eksponentfunktsiooni kohaselt.

- Negatiivne juurealune avaldis viib **kompleksarvuliste juurte** juurde:

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm i\omega,$$

kus $\beta = \frac{b}{2m}$ on *reaal*- ja $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - (\frac{b}{2m})^2}$ *imaginaarosa*. Üldlahendiks on nüüd

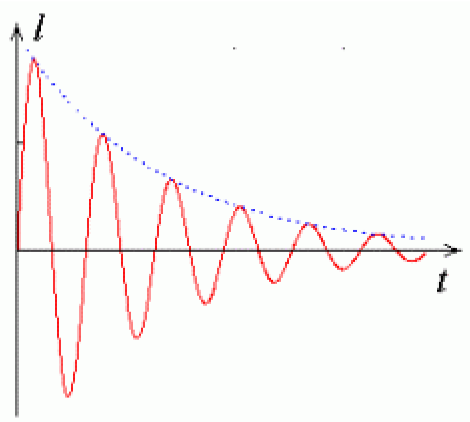
$$l = e^{-\beta t}(C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t),$$

mis sisaldab üheaegselt nii hääbuvat kui perioodilidelt muutuvat osa.

- Lihtsaimat lahendit

$$l = l_0 \, e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0),$$

kus β ja ω omavad ülaltoodud tähendust, nimetame **sumbuvateks võnkumisteks** ja neid võib ligikaudselt vaadelda kui *eksponentsiaalselt kahaneva amplituudiga harmoonilisi võnkumisi*.



Eksponentsiaalselt kahaneva amplituudiga ("peaaegu harmoonilised") võnked.

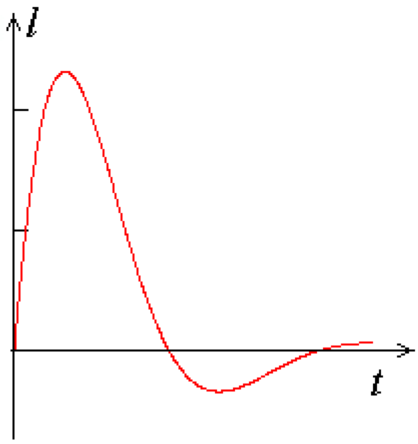
Seda, et toodud valem lähtevõrrandit rahuldab, saab igaüks kontrollida, võttes temast I ja II järku tuletised ning asendades need lähtevõrrandisse.

Suurusi β ja ω nim. vastavalt sumbuvate võnkumiste **sumbuvusteguriks** ja **omasageduseks**.

Võttes arvesse, et $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ oli meie süsteemi vabavõngete sagedus e. *süsteemi omavõnkesagedus*, võime sumbuvate võngete sageduse avaldada kujul:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$$

Loomulikult kehtib see valem vaid juhul, kui $\omega_0^2 > \beta^2$. Vastasel korral on meil karakteristliku võrrandi dekrement (juurealune avaldis lahendi valemis) positiivne ning võnkuv lahend puudub. Veel märgime, et sumbuvvõngete omavõnkeperiood $T = \frac{2\pi}{\omega}$ on seda suurem, mida suurem on sumbuvustegur. Piirjuhul $\beta^2 \longrightarrow \omega_0^2$ $\omega \longrightarrow 0$ ehk $T \longrightarrow \infty$ muutub liikumine **aperioodiliseks** (st. mitteperioodiliseks).



"Vahepealne variant" -- aperioodiline liikumine.

Energiakadu võngete sumbumisel. Sumbuvuse dekrement. Kui sumbuvustegur β on väike, langeb sumbuvvõngete sagedus praktiliselt ühte omavõnkesagedusega. Seetõttu neid tihtipeale ei eristata, käsitledes sumbuvvõnkeid kui väheneva amplituudiga vabavõnkumisi.
Et vabavõngete energia oli võrdeline amplituudi l_0 ruuduga, väheneb võnkuva keha energia iga täisvõnkega $(l(t))^2/(l(t+T))^2$ korda. Suhet $l(t)/l(t+T)$ nimetame **sumbuvuse dekremendiks** (ld. *decrementum*=kahanemine). Lihtne arvutus näitab, et dekrement võrdub $e^{\beta T}$ -ga.

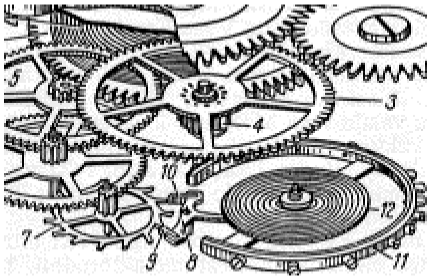
Amplituudi (energia) vähenemist võnkumise käigus kirjeldab sumbuvuse dekrement.

Sagedamini kasutatakse **logaritmilist dekrementi**

$$\Lambda = \ln \frac{l(t)}{l(t+T)} = \beta T.$$

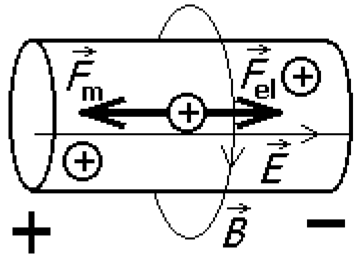
Energia kahaneb seega iga võnkega $e^{2\Lambda}$ korda.

Autovõnked. Selleks, et hoida mehaanilist (või mõnda muud) süsteemi võnkumises, tuleb tema energiavaru regulaarselt täiendada. Juhul, kui lisaenergia allikat lülitab sisse võnkuv süsteem ise, on tegemist autovõngetega.


Autovõngete tavanäide - kellamehhanism. Iga võnke järel annab kellavedru poolt veetav hammasratas (7) balansiirile (11) tõuke, mis kompenseerib hõõrdumisel kaotsi läinud energia.

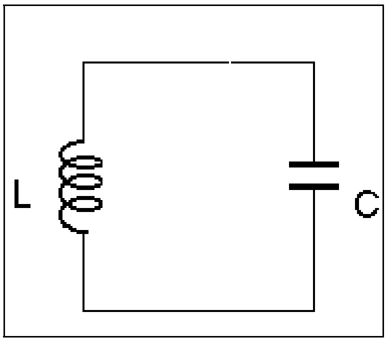
Autovõnkumiste näiteks on kõik mehaanilised kellad. Oluline on see, et pendel (balansiir) saab energiat kellapommilt või vedrult **sama perioodiga, millega süsteem võngub**. Autovõnked kujutavad seega sumbumatuid võnkumisi, mille võnkeperiood siiski pisut erineb omavõnkeperioodist ($\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$). Sundvõnked seevastu toimuvad alati välise teguri (energiaallika) poolt määratud sagedusega, mis ainult erijuhul võib kokku langeda omavõnkesagedusega.

Elektrivõnked
Kujutame ette, et juhtivas keskkonnas (näiteks traadijupis) on tekitatud laengute polarisatsioon, mistõttu juhtme üks ots onlaetud positiivselt, teine aga negatiivselt. Selle tulemusel on juhis elektrivälja tugevus $\vec{E}$ nullist erinev, mistõttu tekib laengute liikumine - elektrivool. Et voolga kaasneb magnetväli, mis muutudes kutsub omakorda esile induktsiooni elektromotoorjõu, mõjub juhis liikuvale laengule kaks vastassuunalist jõudu, millest üks (elektriväli) püüab suurendada laengute liikumiskiirust (voolutugevust), teine (eneseinduktsiooni EMJ) aga takistab seda. Pilt on analoogiline masspunkti liikumisega jõuväljas, kus väline jõud $\vec{F}$ kiirendab punkti liikumist, inertsijõud $\vec{F}_i = -m\frac{d\vec{v}}{dt}$ aga takistab seda.



Võnkuvad laengud sirgjuhtmes.

Elektriskeemidel kujutatakse seda tavaliselt nn. **võnkeringina**, mis koosneb *induktiivsusest* L ning *mahtuvusest* C.



Võnkering.

Loomulikult on igal juhil nii mahtuvus (väljendab potentsiaali muutust laengu lisamisel) kui ka induktiivsus (väljendab eneseinduktsiooni elektromotoorjõudu voolutugevuse muutmisel), tähised on vajalikud nende omaduste fikseerimiseks.

Et kirja panna valemeid, mis kirjeldaksid laengute liikumist, alustame Kirchoff'i II reeglist. Kuna tegu on ühe ringiga, tuleb ka üks valem:

$$U_C = \mathcal{E}_i \quad \text{ehk} \quad \frac{q}{C} = -L\frac{dI}{dt}.$$

Asendades siia $I = \dot{q}$ ning jagades mõlemaid pooli $-L$-ga, saame

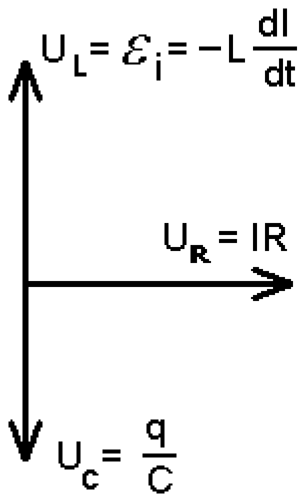
$$\ddot{q} = -\frac{1}{LC}q,$$

mille lahendiks on **vabavõngete võrrand**

$$q = q_0 \sin(\omega t + \varphi_0),$$

milles $\omega^2 = \frac{1}{LC}$ on **võnkeringi omavõnkesagedus**.

Füüsikaline sisu: kondensaatori tühjenemisel kasvab voolutugevus koos laengu vähenemisega ning saavutab maksimaalväärtuse hetkel, kus laeng on null ja elektriväli juhis puudub. Samaks hetkeks omandab maksimaalse tugevuse ka juhet ümbritsev magnetväli $B \sim I$. Pinge kondensaatoril on nüüd null, samuti võrdub nulliga ka elektriväli. Vool juhtmes aga ei katke, kuna nõrgenev magnetväli tekitab omakorda indutseeritud elektrivälja, mis, sundides laenguid liikumist jätkama, laeb kondensaatori uuesti - seekord aga vastasmärgiliselt. Laadimisvool lakkab alles siis, kui kondensaatori elektriväli peatab laengute liikumise juhtmes. Edasi kordub kõik uuesti, kuid ümberpööratud polaarsusega.



Elektrivõnkumiste faasidiagramm. Induktsiooni elektromotoorjõud on alati vastassuunaline pingega kondensaatoril, voolutugevuse faasinurk jääb täpselt nende vahele ("vektor" IR on kaksiknoolega $U_L U_C$ risti).

Märgiprobleemist. Pinge kondensaatoril $U_C = \frac{q}{C}$, genereerides voolu suunaga plussilt miinusele, tekitab vastassuunalise induktsiooni EMJ $\mathcal{E}_i = -L\dot{I}$. Et laengule mõjuvad nad üheaegselt, peaks summaarne pinge juhtmes võrduma $U_C + \mathcal{E}_i$ ehk $\frac{q}{C} - L\dot{I}$, mis erineb Kirchoffi reeglist saadud valemist. Märgiviga tekib kondensaatori juures: me ei arvestanud voolu suunaga. Pinge kondensaatoril on küll suunatud plussilt miinusele, aga **vool** vooluringis kulgeb piki juhtmeid, mitte aga "otse". Kui joonistada voolu suund "üle kondensaatori" (vt. joonis), näeme, et see läheb miinuselt plussile.

Seega vastaks meie skeemile pingelang $U_C = -\frac{q}{C}$, mis "neutraliseerib" $\mathcal{E}_i$ miinusmärgi.

Pinge (potentsiaalide vahe) märk on üldse üks salakaval asi. märgi valikul tuleb alati vaadata, kas pinge muutus suurendab või vähendab kondensaatori energiat. Meie juhul energia vähenes, järelikult pidi pingelangu märk olema negatiivne. Pärast seda, kui kondensaator oli tühjenenud ja algas uus laadimine, pingelangu märk muutus. Et aga samast momendist alates voolutugevus mitte enam ei kasva, vaid kahaneb, muutub ka elektromotoorjõu märk ning märgid tasakaaluvõrrandis jäävad samaks.

Sumbuvad elektrivõnked. Reaalses vooluahelas on alati ka nn. **oomiline takisti**, kus pingelang tekib elektrienergia muutumisest soojuseks (Joule-Lenz'i seadus). Sellise ahela kohta annab Kirchoff'i reegel

$$U_C + RI = \mathcal{E}_i \quad \text{ehk} \quad \frac{q}{C} + R\dot{q} = -L\ddot{q},$$

millele vastab juba tuntud homogeenne diferentsiaalvõrrand

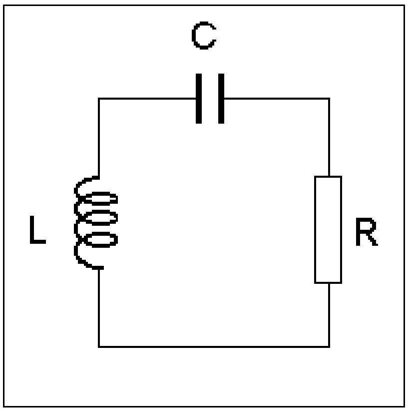
$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0$$

lahendiga

$$q = q_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0),$$

kus $\beta = \frac{R}{2L}$ ning $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$.

$\omega_0 = \sqrt{1/LC}$ oli mäletatavasti omavõnkesagedus.



"Reaalne vooluring" koosneb mahtuvusest (kondensaatorist) ***C***, induktiivsusest ***L*** ja oomilisest takistist ***R***. Sellises võnkeringis tekivad **sumbuvad elektrivõnked**.