

Loeng 6. Tahke keha pöörlemine.

Pöörliikumisest on seni juttu olnud kahel korral: staatika osas, kus meie esimest masinat pööras *jõumoment* ning kinemaatika osas, kus tööme näite kõva keha pöörlemisest kui ühedimensionaalsest liikumisest.

Newtoni dünaamika ei erista pöörliikumist kulgevast liikumisest. Kuna sealsed valemid käivad **punktmassi** kohta, polegi neid võimalik eristada - punkt, millel pole joonmõõtmeid, ei saagi pöörelda.

Mispärast? Vihje: pange punktist telg läbi ja proovige defineerida pöördenurka!

Lõplike mõõtmetega keha pöörlemise dünaamika. Kui me tegime kulgliikumise valemid, märkisime, et keha liikumise kirjeldamiseks piisab ühe punkti liikumisest, kuna kõik teised liiguvad samamoodi.

Pöörlemist eristab kulgliikumisest just see, et **samasuguse liikumise tingimus pole enam täidetud**. Iga pöörleva keha punkt liigub kulgevalt, kuid **nende trajektoorid ruumis on erinevad**.

Kuna keha jääb pööreldes siiski tervikuks, on need trajektoorid aga omavahel seotud - seetõttu saab võimalikuks kirjeldada keha pöörlemist **ühe võrrandiga**. Muidugi üksnes juhul, kui keha kuju ei muutu. Aga see eeldus oli vajalik ka kulgliikumise korral.

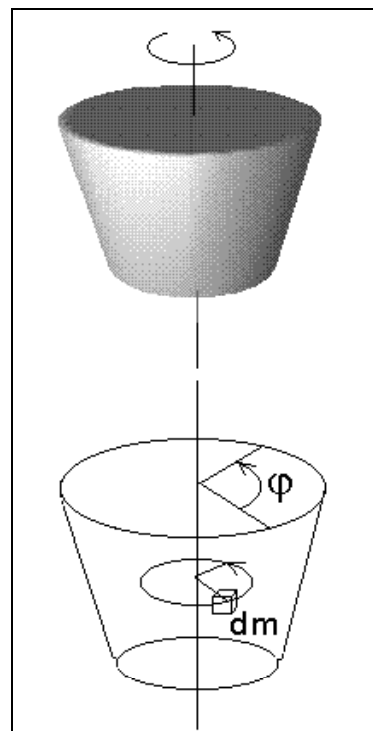
Pöörlemise põhivõrrandite kirjanek olekski esimene näide Newtoni seaduste **kollektiivsest** rakendamisest. Pöörlev keha jagatakse lõpmata väikesteks osadeks, mille liikumist saab kirjeldada kulgliikumise valemite abil. Neile valemitele lisanduvad keha koos püsivuse matemaatilised tingimused.

Eraldame vaadeldavast kehas tükikese, mille mass on dm . Olgu selle tükikese kaugus pöörlemisteljest r ja mõjuga temale jõud $d\vec{F}$. Tükike peaks selle jõu mõjul hakkama liikuma jõu suunas kiirendusega

$$\vec{a} = \frac{1}{dm} d\vec{F}$$

Peaks, aga ei saa. Pöörlemine tähendab, et keha need punktid, mis asuvad pöörlemisteljel, jäävad paigale. Kui meie poolt vaadeldav tükike liigub telje suhtes peaks keha kiir muutuma - see aga nõue

Pöörlemise all mõistetakse jäiga, liikumise käigus mitte deformeeruva keha asendi (orientatsiooni) muutust. Pöörleva keha erinevad osad liiguvad piki erinevaid trajektoore, kuid säilitavad oma vastastikuse asendi.



Pöörlev keha: iga tükike dm liigub piki ringjoonelist trajektoori

lubatud. Keha kuju säilib vaid juhul, kui tükike (koos kogu kehaga!) **pöördu** ümber telje, st. liigub risti nii telje kui ka teda teljega ühendava sirglõiguga. Seetõttu ei mõjuta pöörlemist mitte kogu jõud $d\vec{F}$, vaid tema see komponent, mis on nii telje kui r -ga risti.

Katsume nüüd kirja panna dünaamika põhivõrrandi - Newtoni II seaduse - selle tükikese kohta. Et kõik need diferentsiaalid meid segadusse ei ajaks, kujutame, et tegu on "normaalse" punktmassiga m ja "normaalse" jõuga \vec{F} . Veel oletame, et jõud mõjub risti pöörlemisteljega. Selle jõu mõjul saab tükike kiirenduse

$$a_T = \frac{1}{m} F_T,$$

kus $F_T = F \sin \alpha$ ja α on nurk jõuvektori \vec{F} ning tükikest pöörlemisteljega ühendava raadiuse \vec{r} suuna vahel. Nagu jooniselt näeme, on aga $\sin \alpha = \frac{l}{r}$, kus l on jõu \vec{F} õlg. Saame:

$$a_T = \frac{1}{m} F_T = \frac{1}{m} F \sin \alpha = \frac{1}{m} F \frac{l}{r} = \frac{1}{m} \frac{M}{r},$$

kus $M = Fl$ on jõu \vec{F} moment ette antud telje suhtes.

Katsume siit jõuda pöörlemise kinemaatika valemis olevate suurusteni. Pöörde ulatust mõttis seal pöördenurk φ , mille esimeseks tuletiseks aja järgi oli nurkkiirus $\omega = \dot{\varphi}$ ning teiseks tuletiseks nurkkiirendus $\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$. Et pöördenurka mõõdeti radiaanides (ringjoone kaare pikkuse ja raadiuse suhe!), on pöördenurga suuruseks $d\varphi = ds/r = \frac{1}{r} ds$ ning vastavalt $\varepsilon = \frac{1}{r} a_T$.

Pöörlemise dünaamika põhivõrrand tuleb nüüd lihtsalt:

$$\varepsilon r = a_T = \frac{1}{m} \frac{M}{r} \implies \varepsilon = \frac{1}{mr^2} M = \frac{1}{I} M,$$

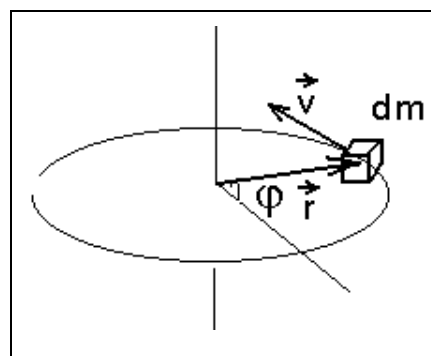
kus $I = mr^2$ on meie "tükikese" inertsimoment.

Katsume leitud üldistada lõpliku kuju ja mõõtmetega keha kohta. Selleks tuleb leida keha kui terviku inertsimoment ja kehale mõjuv jõumoment. Inertsimomendi saame, kui liidame kokku kõigi tükikeste inertsimomendid:

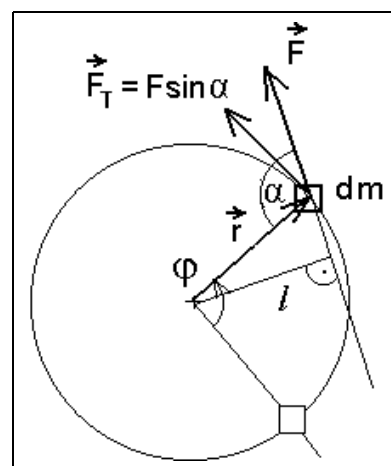
$$I_{keha} = \sum I_{tükike} = \sum m_i r_i^2.$$

Seda saab teisendada integraaliks, kui keha on ühtlase tihedusega, st. valmistatud mingist kindla tihedusega materjalist (puust, rauast jne.).

Siis



Tükikese dm liikumist saab kirjeldada tema kohavektori \vec{r} ning pöördenurga φ abil. Igal tükikesel on oma kindel kohavektor; pöördenurk aga on kõigile ühine.



Tükikesele dm mõjuv jõud \vec{F} paneb pöörduma terve keha; arvesse tuleb vaid selle komponent $F \sin \alpha$, mis mõjub piki rakenduspunkti liikumissuunda (trajektoori puutujat).

$$I = \int_V \rho r^2 dV,$$

kus $\rho = m/V$ on tihedus ning integraal võetakse üle kogu ruumala ning r on tükikese dV kaugus teljest.

Integraali saab arvutada korrapäraste kehade, nagu pöördkehad, vardad, tasapinnalised plaadid jne. puhul, kui õnnestub iga tükikese ruumala anda tema kauguse r ja selle lõpmata väikese muudu dV kaudu. Kõigil muudel juhtudel peame inertsimomendi määrama katseliselt, pannes keha kindla jõu(momendi) abil pöörlema.

Kuidas seda teha? Vihje: meenutage üht laboritööd!

Milline on jõumoment ja kuidas ta tekib, on omaette probleem. Koolifüüsikas käsitletakse lihtsaimat juhtu - **jõupaari**, mis moodustub kahest vastassuunalisest, kuid piki erinevaid sirgeid mõjuvast jõust.

Tegelikult kujuneb jõumoment väga erinevat tüüpi jõudude koosmõjul - olgu näiteks laboritöös trumlilt mahakeriv nõör (mille poolt tekitatava jõumomendi suurus on lihtne määrata), aga ka hüdro- või auruturbiinile ning elektrimootori rootorile mõjuvad jõumomendid.

Kõiki neid mõjusid saab võrrelda lihtsalt ette kujutatava momendiühiku **njuutonmeetriga**.

Jõumoment on võrdeline jõuvektori mooduliga ning jõu mõjumissirge kaugusega pöörlemisteljest.

Njuutonmeeter (Nm) on jõumoment (pöördemoment), mis on ekvivalentne ühenjuutonilise jõu poolt tekitatava momendiga, kui jõu õla pikkus on üks meeter.

Jäiga keha pöörlemist iseloomustavate suuruste - jõumomendi ning inertsimomendi - sisse toomine lubab kasutada pöördliikumise kirjeldamiseks kulgliikumise valemeid. Paraku ei tee see neid liikumisi sarnasemaks.

Kui ühtlane sirgliikumine on vaba oma olemuselt (keha jagunemisel osadeks jätkavad need kõik liikumist oma esialgsel trajektooridel); siis pöörlemisel püsivad keha osakesed oma ringikujulistel trajektooridel ainult tänu keha koos hoidvatele sisejõududele. Kui tükikeseks jaguneb ühtlaselt pöörlev keha, lendavad selle tükid mööda ruumi laiali.

Pöörlemise põhivõrrand:

Keha nurkkiirendus on võrdeline jõumomendiga ning pöördvõrdeline inertsimomendiga.

Küsimus: Kas oskate leida jõumomenti juhul, kui jõud ei ole risti pöörlemisteljega?

Pöörlemisintegraalid. Pöörliikumisele saab kerge vaevaga üle kanda ka töö, energia ja liikumishulga mõisteid. Vastavad valemid

$$A = M\varphi \quad (= Fl \cdot \frac{s}{l} = F \cdot s);$$

$$E_{kin} = \frac{I\omega^2}{2} \quad (= \frac{mr^2(\frac{v}{r})^2}{2} = \frac{mv^2}{2});$$

$$M\Delta t = \Delta(I\omega) \Rightarrow Fr\Delta t = \Delta(mr^2 \cdot \frac{v}{r}) \Rightarrow F\Delta t = \Delta(mv).$$

Suurust $L = I\omega$ nimetatakse **pöördimpulsiks**, ka *pöörlemishulgaks* ja *impulssmomentiks*. Siin on nad toodud "lõpmata väikese ainetükikese" kohta - aga, nagu dünaamika valemiski, saab neid summeerida-üldistada lõplike mõõtmetega keha jaoks.

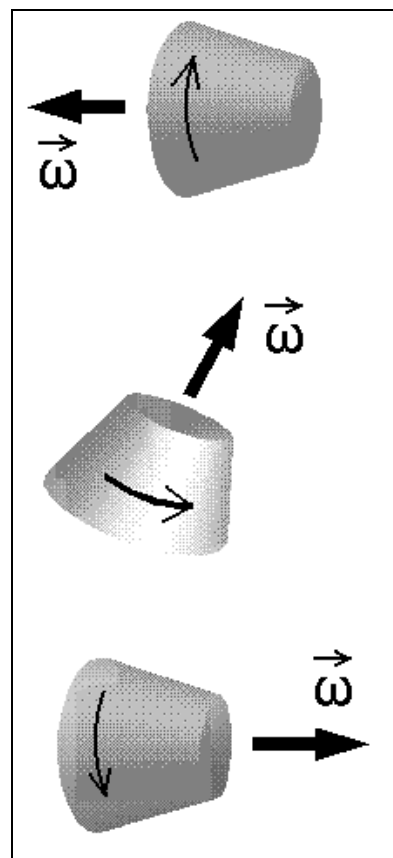
Ja loomulikult kehtivad nende kohta kõik kulgliikumises õpitud seadused. Kui pöörlemise kineetiline energia lihtsalt liitub varasema, potentsiaalset ja kulgliikumise kineetilist energiat sisaldava avaldisega, siis pöördimpulsi jäävuse seadust peetakse täiesti iseseisvaks liikumisintegraaliks. Ikka selsamal põhjusel, et pöörlemine ja kulgliikumine pole samastatavad.

Pöörlemisvektorid. Lisaks ülaltoodule eristab pöörliikumist kulgliikumisest erilise punkti - **pöörlemistsentri** ja erilise sirge - **pöörlemistelje** olemasolu. Nii jõu- kui inertsimoment sõltuvad pöörlemistsentri ning -telje valikust. Kui vaadelda pöörlevat keha meie tavalises taustsüsteemis (Cartesiuse ristkoordinaadistikus), on pöörlemistsenter määratud kohavektoriga (nimetame seda pöörleva keha asukohaks ruumis), pöörlemistelg aga sellest punktist lähtuva sirge - **pöörlemisvektoriga**.

Pöörlemisvektoriga saab edasi anda kogu pöörlemisvõrrandi. Selleks defineerime kolm suurust:

- **pöördenurga vektor** $\vec{\varphi}$ on vektor, mille moodul võrdub pöördenurgaga ja mille suund antakse piki pöörlemistelge nii, et keha pöördumisel ümber telje kehtiks "parema käe kruvireegel":
 - Kui keha pöörlemissuund võtta tavalise (parempoolse vindiga) kruvi pöördumissuunaks, siis ühtib kruvi liikumissuund pöördenurga vektori suunaga.
- **nurkkiiruse vektor** $\vec{\omega}$ on vektor, mille moodul võrdub nurkkiirusega ning mille suund piki telge ühtib pöördenurga suunaga, kui nurk suureneb ja on sellega vastassuunaline, kui pöördenurk väheneb;
- **nurkkiirenduse vektor** $\vec{\epsilon}$ on vektor, ... (jätkake ise!).

Ka pöörliikumisel kehtivad liikumishulga ning kineetilise energia jäävuse seadused. Neid on mõistlik esitada pöörlemisele sobivas formalismis, ehkki sisu on sama mis kulgliikumisel



Pöörlemisvektorite suuna määrab (parempoolse) kruvi reegel.

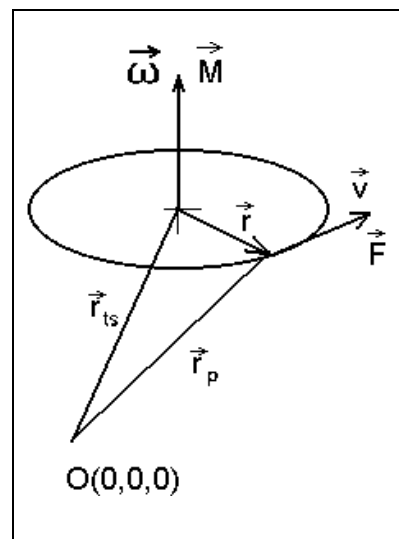
Pöörlemisvektorid pole tegelikult õiged vektorid: neid ei saa liitlahutada, ka ei kehti nende jaoks taustsüsteemi vahetuse valemid. Neid detaile käsitleb jällegi teoreetiline mehaanika. Et märkida erinevust "õigete vektoritega", nimetatakse neid *aksiaal- ehk pseudovektoriteks*.

Aga arvutada nendega saab. Näiteks võime pöörleva keha mingi punkti joonkiiruse (tangentsiaalkiiruse) vektori avaldada nurkkiiruse vektori ning vaadeldava keha kohavektori ja pöörlemisentra kohavektori vahe *vektorkorrutisena*:

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times (\vec{r}_p - \vec{r}_{ts}),$$

kus \vec{r}_p on vaadeldava punkti kohavektor, \vec{r}_{ts} aga pöörlemisentra kohavektor. Mida kujutab endast vektorkorrutis, vaadake matemaatika konspektist.

Samasugused valemid saame teha ka pöörleva keha suvalise punkti nihke ning tangentsiaalkiiruse tarbeks. Tehke seda! Kuidas leida normaalkiirust, sellest järgmises punktis.



Punkti joonkiiruse leidmine keha nurkkiiruse ja tema ning pöörlemisentra kohavektorite kaudu.

Inertsijõud pöörlevas süsteemis. Keha pöörlemine ei tähenda midagi, iga tema "tükike" liigub ikkagi Newtoni (kulgliikumise) seaduste järgi. Ringjoonelisel trajektoorigil hoiavad teda aine ehitusest tulenevad sisejõud. "Tükikeste" püüdu sirgliikumise poole kajastavad **inertsijõud**, mis on tasakaalustatud sisejõudude poolt. Kõik nad tuletatakse Newtoni II seadusest kujul $\vec{F} = m\vec{a}$, kus kiirustus \vec{a} väljendab "tükikese" vastuseisu pöörlemisest tekitatud trajektoori muutustele. Neid viimaseid on kolme liiki:

- **tsentrifugaaljõud** on jõud, mis tasakaalustab ringjoonelisel trajektoorigil liikuva keha normaalkiirust. Et normaalkiirustus kutsus esile trajektoori kõverdumise ning sõltub keha kiirusest, on tema suurus võrdeline nurkkiiruse ruuduga:

$$F_{ts} = ma_N; \quad a_N = \frac{v^2}{r} \quad \rightarrow \quad F_{ts} = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r.$$

- **Coriolise jõud** tekib siis, kui mingi "tükike" peab pöörleva keha (näiteks Maakera) pinnal või sees liikuma. Et keha püüab oma tangentsiaalkiirust säilitada, tuleb teda pidurdada (kui liikumine on suunatud telje poole) või kiirustada (kui keha liigub teljest eemale). Tekib liikumisega risti olev inertsijõud.

Pöörlemisvektori praktilisi rakendusi:

- a) pöörleva keha mingi punkti joonkiiruse \vec{v} leidmine:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r};$$

- b) jõumomendi \vec{M} leidmine:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

\vec{F} on jäiga keha punkti \vec{r}_p rakendatud jõud,

$\vec{r} = \vec{r}_p - \vec{r}_{ts}$ jõu rakenduspunkti ning pöörlemisentra kohavektorite vahe.

- **güroskoopilised jõud** tekivad, kui püütakse muuta pöörlemistelje ruumilist orientatsiooni. Nagu eelmiste jõudude korral viib ka telje pööramine "tükikste" trajektoori muutmisele. Et igale tükikesele vastab teisel pool telge samasugune, kuid vastassuunas liikuv tükike, tekib siin **inertsijõudude paar** (seepärast ongi need jõud mitmuses!), mis püüab telge "õigeks" pöörata. Kui keha pöördimpulss on suur ja jõud väike, jääb tema mõju märkamatuks: pöörlev keha säilitab oma ruumilise orientatsiooni. Kui jõud on suur, hakkab keha **pretsesseerima** - tema telg pöörduv ruumis, aga mitte mõjuvate jõudude suunas, vaid nendega risti.

Pöörleva keha käitumise määravad inertsijõud, mille tekkepõhjuseks on Newtoni I seadus - keha osade püüd säilitada ühtlast sirgjoonelist liikumist.

Tehnoloogias on olulised tsentrifugaal- ja güroskoopilised jõud, kuna nende mõju seab piiranguid pöörlevate masinaosade ehitusele. Põhjalikumalt tutvute nendega mehaanika kursuses.

Pöörlemise tüübid. See, millest siiani juttu, võiks kanda nime "pöörlemine teljel". Me oletasime, et pöörlemistelg on ette määratud ning kõik meie pöörded toimusidki selle kindla telje ümber. Polegi väga vaele, kuna enamikus tehnilistest seadmetest on pöörlemistelg fikseeritud võlli või laagrite abil.

Veeremine. Loodus ei tunne ei võlli ega ratast - mõlemad on inimese väljamõeldis. Küll aga esineb looduses - ja üsna tihti - nähtus, mida nimetatakse veeremiseks. Veerev keha liigub üheaegselt nii pöörlevalt kui kulgevalt, seejuures jääb tema toetuspinna kokkupuutev osa viimase suhtes paigale. Veeremise abil ületab loodus hõõrdejõudu: takistus veeremisel puudub, kuna pindade omavahelist nihkumist ei toimu.

Kui veerev keha on telgsümmeetriline (ratas, silinder, kera), liigub pöörlemistelg kulgevalt, toetuspinna kokkupuutes olev osa seisab (toetuspinna suhtes) paigal, selle vastaspunkt aga liigub teljega võrreldes kahekordse kiirusega. Kui arvutada sellise veereva objekti kineetilist energiat või liikumishulka, ei tohi unustada ka pöörlemist. Näiteks saame veereva silindri kineetiliseks energiaks

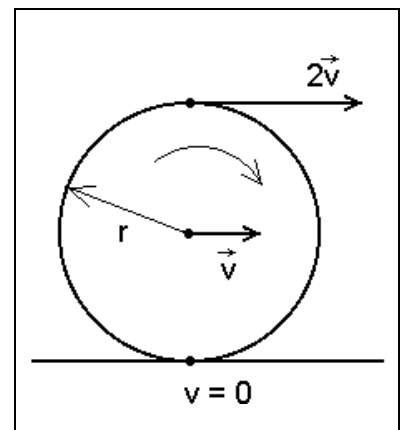
$$E_{kin} = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2},$$

ning arvestades, et silindri puhul $I = mr^2/2$ ja $\omega = v/r$,

$$E_{kin} = \frac{mv^2}{2} + \frac{\frac{mr^2}{2} \cdot \left(\frac{v}{r}\right)^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{mv^2}{4} = \frac{3}{4}mv^2.$$

Analoogiliselt arutledes saame liikumishulgaks

$$p = mv + I\omega = \dots$$



Veeremine: ratta alumine punkt seisab tee suhtes paigal, ülemine liigub kahekordse kiirusega.

Veeremine: keha kulgliikumise kiirus v on võrdne veereva keha raadiuse r ja pöörlemiskiiruse ω korrutisega.

- aga arvutage parem ise. Ja püüdke välja mõelda, mis saab liikumishulgast kui **vektorist**.

Ning veel üks küsimus: kumb veereb mäest alla kiiremini, kas ühtlase tihedusega monoliitne silinder või õõnessilinder?

Vaba keha pöörlemine. Kuidas hakkab aga pöörlema keha, mis pole kusagilt kinnitatud ega toetu ka pinnale? Näiteks sputnik, lennuk või helikopter.

Et keha hakkaks pöörlema, peab teda mõjutama jõupaar - kaks vastassuunalist võrdset jõudu, mis ei mõju piki sama sirget. Kõige lihtsam on teha rida katseid, visates õhku näiteks risttahuka ja pannes ta samal ajal pöörlema. Juhime tähelepanu kolmele faktile:

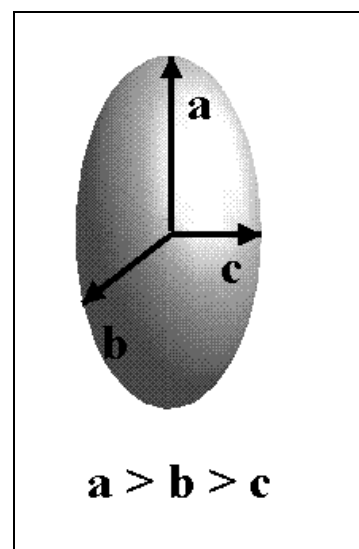
1. Pöörlemine ei sõltu sellest, kas jõupaar rakendub telje suhtes sümmeetriliselt või mitte;
2. Vaba keha pöörlemistelg läbib alati masskeskme;
3. Stabiilne pöörlemine on võimalik ainult kõige pikema või kõige lühema telje ümber.

Ka selle kohta on teooria. Ükskõik missuguse kujuga keha jaoks saab arvutada nn. **inertiellipsoidi** - kolmeteljelise ühtlase ainejaotusega ellipsoidi, mille inertsimomendid ükskõik millise (masskeset läbiva!) telje suhtes on võrdsed modelleeritava keha inertsimomendiga sama telje suhtes. Selle ellipsoidi kolm peatelge määravadki vaba keha stabiilse pöörlemise oleku: keha saab pöörelda vaid nende kahe telje ümber, mille suhtes tema inertsimoment on kas minimaalne (mudelellipsoidi pikim telg) või maksimaalne (lühim telg). Kui sundida vaba keha pöörlema mõne teise telje ümber (rakendades vastava suunaga jõupaari), võtab keha pärast mõningat laperdamist ruumis orientatsiooni, kus pikim/lühim telg on pööratud paralleelseks pöörlemist esile kutsuva jõupaari momendivektori $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ suunaga.

Miks nii, kuulub teoreetilise mehaanika kõrgema pilotaazi valdkonda. Võite edasi mõelda. Annan ka vihje: lahendus peitub (potentsiaalse?) energia miinimumi lauses ja (pöörd)impulsi jäävuse seaduses. Keha lihtsalt ei saa teisiti pöörelda.

Väga kasulik seadus. Selle abiga stabiliseeritakse kosmilisi satesatelliite.

Kokkuvõtteks: pöörlev liikumine on äärmiselt keeruline, kõigi üksikasjade suhtes puudub füüsikutel tänaseni üksmeel. Et ta on samal ajal nii looduses kui tehnikas väga levinud, tuleb tema kohta käivaid teooriaid võtta täie tõsidusega.



Inertiellipsoid: pikima telje a suhtes on inertsimoment minimaalne, lühima telje c suhtes maksimaalne.

Stabiilne pöörlemine on võimalik vaid nende pöörlemistelgede korral, kus pöörlemise kineetiline energia on antud pöörlemiskiiruse juures ekstremaalne.